

Блок-схема алгоритма лучевого теста приведена на рис. 1.17, г. Направление луча задается вектором $V = [\cos(\varphi) \sin(\varphi)]$ единичной длины со случайным углом $\varphi = \text{rnd}(2\pi)$, равномерно распределенным в интервале $(0, 2\pi)$. Параллельность луча и i -го ребра $p_i p_{i+1}$ устанавливается тестом (1.21) по нулевому значению определителя обращаемой в (1.45) матрицы.

Расчет четности числа пересечений луча с ребрами полигона ведется с помощью флажка f , устанавливаемого сначала как для внешней точки в 1 и инвертируемого при каждом пересечении ребра лучом. В результате после завершения обхода полигона возвращаемое значение f автоматически будет равно 1 для внешней или -1 для внутренней точки.

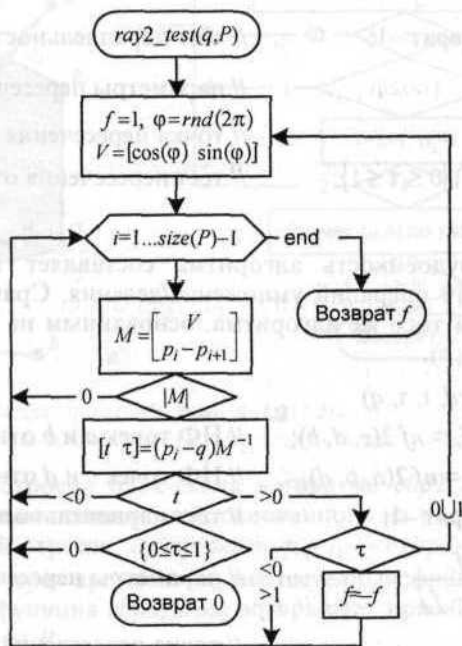
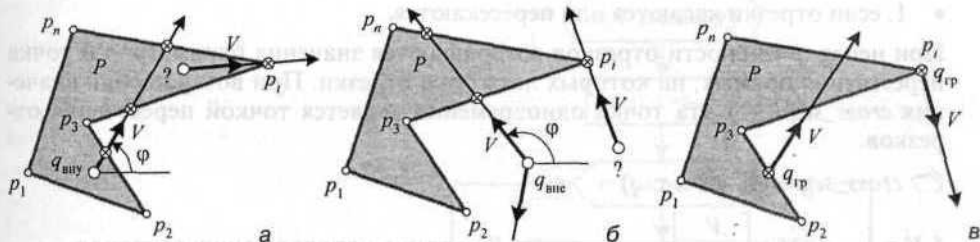


Рис. 1.17

1.1.2.9. Алгоритмы пересечения на плоскости

- *Перенесение отрезка прямой линии ab с отрезком cd .*

Когда в (1.30,6) ищется пересечение не бесконечных прямых, а их отрезков то кроме проверки непараллельности прямых необходимы дополнительные проверки $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq \tau \leq 1$ принадлежности точки их пересечения одновременно обоим отрезкам. Составим алгоритм расчета точки q и параметров t и τ пересечения отрезков ab и cd , возвращающий признак пересечения:

- -1, если прямые отрезков параллельны (не пересекаются) или совпадают (точка пересечения не определена);
- 0, если непараллельные отрезки не пересекаются;
- 1, если отрезки касаются или пересекаются.

При непараллельности отрезков возвращаются значения параметров и точка пересечения прямых, на которых лежат эти отрезки. При возвращении значения $cross_segm = 1$ эта точка одновременно является точкой пересечения отрезков.

□ $cross_segm(ab, cd, t, \tau, q)$

$\{ V = b - a, M = \begin{bmatrix} V \\ c - d \end{bmatrix};$ // матрица направляющих векторов

если $|M| = 0$, то возврат -1; // тест параллельности прямых

$[t \ \tau] = (c - a)M^{-1};$ // параметры пересечения прямых

$q = a + Vt;$ // точка пересечения прямых

возврат $\{0 \leq t \leq 1\} \cap \{0 \leq \tau \leq 1\};$ // тест пересечения отрезков

} □

Максимальная трудоемкость алгоритма составляет 11 операций сложения/вычитания и 10 операций умножения/деления. Сравним эти затраты со вторым вариантом того же алгоритма, основанным на использовании неявных функций (1.35, z).

□ $cross_segm(ab, cd, t, \tau, q)$

$\{ f_a = nf2(c, d, a), f_b = nf2(c, d, b);$ // НФ точек a и b относительно cd

$f_c = nf2(a, b, c), f_d = nf2(a, b, d);$ // НФ точек c и d относительно ab

если $f_c = f_d$, то возврат -1; // тест параллельности прямых

$t = \frac{f_a}{f_a - f_b}, \tau = \frac{f_c}{f_c - f_d};$ // параметры пересечения прямых

$q = a + (b - a)t;$ // точка пересечения прямых

возврат $\{f_a f_b \leq 0\} \cap \{f_c f_d \leq 0\};$ // тест пересечения отрезков

} □

Несмотря на кажущуюся простоту второго варианта, его трудоемкость вдвое выше — 41 арифметическая операция, в числе которых 27 сложений/вычитаний и 14 умножений/делений. Далее с именем *clip2_segmt* будем связывать более эффективный первый вариант функции расчета пересечения отрезков.

- Пересечение отрезка ab с полигоном $P = \{p_1, \dots, p_{i-1}\}$.

Требуется отсечь от отрезка те его части, которые находятся вне полигона (рис. 1.18, а). Здесь мы рассматриваем задачу *внешнего* отсечения отрезка *выпуклым* полигоном. Другие варианты отсечения обсуждаются в конце этой главы и в гл. 4.

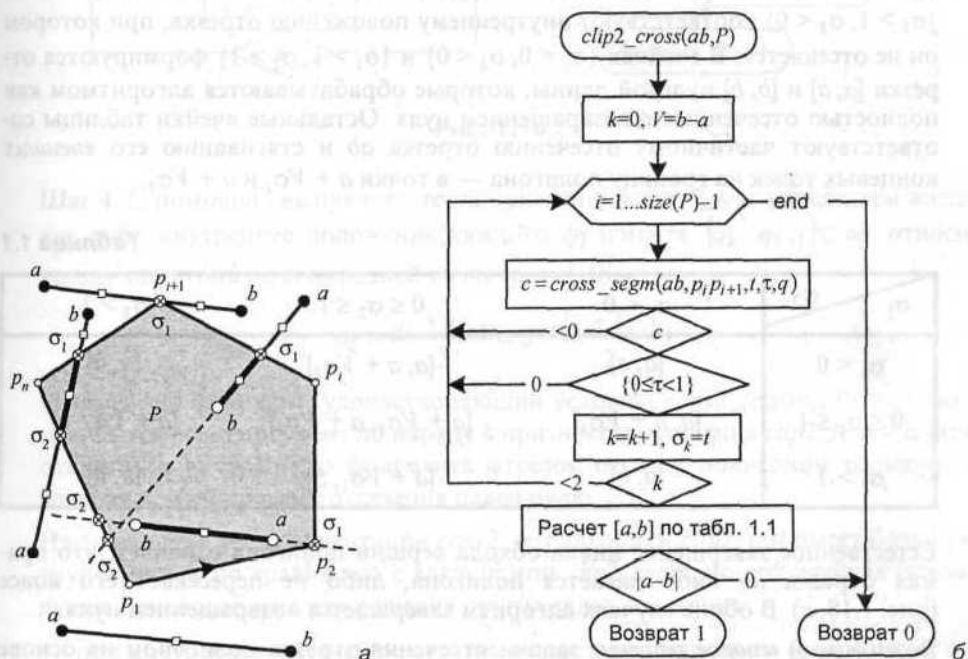


Рис. 1.18

На рис. 1.18,б построена блок-схема алгоритма *clip2_cross(ab, P)* отсечения отрезка ab выпуклым полигоном P , основанного на расчете пересечений прямой $\{a, b\}$, несущей отрезок, с отрезками $p_i p_{i+1}$ — сторонами полигона. Алгоритм возвращает через аргумент ab неотсеченный фрагмент отрезка внутри полигона, а сама функция *clip2_cross* возвращает признак видимости отрезка ab в "окне" полигона P :

- 0, если отрезок находится вне полигона и целиком им отсекается;
- 1, если отрезок весь или частично расположен внутри полигона.

Работа алгоритма начинается с инициализации счетчика пересечений $\kappa = 0$ и вычисления направляющего вектора отрезка $V=b-a$. Далее выполняется обход ребер полигона $p_i p_{i+1} \forall i = \overline{1, n}$ и расчет пересечений с ними не самого отрезка ab , а несущей его прямой $a + (b-a)t$ с помощью функции *cross_segnt*. Если возвращаемое ею значение не отрицательно и прямая пересекает ребро (это обнаруживается по условию $0 \leq t \leq 1$), то счетчик пересечений κ инкрементируется, а параметр t сохраняется в переменной σ_i . По достижении двух пересечений ($\kappa = 2$) дальнейший обход *выпуклого* полигона прекращается.

Концевые точки неотсеченного отрезка $[a, b]$ рассчитываются с помощью табл. 1.1 в зависимости от значений $\sigma_1 = t_i$ и $\sigma_2 = t_j$ параметра t , при которых прямая пересекла ребра $p_i p_{i+1}$ и $p_j p_{j+1}$. Две ячейки $\{\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 1\}$ и $\{\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 0\}$ соответствуют внутреннему положению отрезка, при котором он не отсекается. В ячейках $\{\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0\}$ и $\{\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1\}$ формируются отрезки $[a, a]$ и $[b, b]$ нулевой длины, которые обрабатываются алгоритмом как полностью отсеченные с возвращением нуля. Остальные ячейки таблицы соответствуют частичному отсечению отрезка ab и стягиванию его *внешних* концевых точек на границу полигона — в точки $a + V\sigma_1$ и $a + V\sigma_2$.

Таблица 1.1

$\sigma_1 \backslash \sigma_2$	$\sigma_2 < 0$	$0 \leq \sigma_2 \leq 1$	$\sigma_2 > 1$
$\sigma_1 < 0$	$[a, a]$	$[a, a + V\sigma_2]$	$[a, b]$
$0 \leq \sigma_1 \leq 1$	$[a, a + V\sigma_1]$	$[a + V\sigma_1, a + V\sigma_1]$	$[a + V\sigma_1, b]$
$\sigma_1 > 1$	$[a, b]$	$[a + V\sigma_1, b]$	$[b, b]$

Естественное завершение цикла обхода вершин полигона означает, что прямая отрезка ab либо касается полигона, либо не пересекает его вовсе (рис. 1.18, а). В обоих случаях алгоритм завершается возвращением нуля.

Возможно и *второе решение* задачи отсечения отрезка полигоном L на основе выпуклого теста ориентации точки (1.38). Оно представлено на рис. 1.19 блок-схемой алгоритма *clip2_test(ab, P)* отсечения отрезка ab выпуклым полигоном $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, работающего следующим образом.

☞ Шаг 1. Инициализируем список $L = \{0, 1\}$, в который будем записывать значения параметра $t \in [0, 1]$ положения точек на прямой $p(t) = a + (b-a)t$. Начальный состав списка соответствует концевым точкам отрезка $a = p(0)$ и $b = p(1)$.

Шаг 2. Рассчитываем не более двух пересечений отрезка ab с отрезками $p_i p_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. Значения параметра пересечения t добавляем в список L .

Шаг 3. Сортируем список L по возрастанию, после чего точки $q_k = p(L_k)$ разбивают отрезок ab на непересекающиеся фрагменты общим числом не более трех.

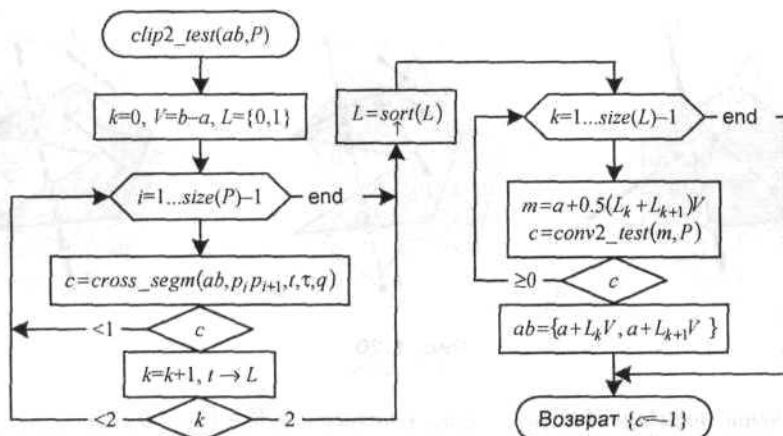


Рис. 1.19

Шаг 4. С помощью выпуклого теста ориентации $conv2_test$ определяем внешнее либо внутреннее положение каждого фрагмента $[q_k, q_{k+1}] \subseteq ab$ относительно полигона по его средней точке (рис. 1.18, а)

$$m_k = \frac{q_k + q_{k+1}}{2} = a + \frac{L_k + L_{k+1}}{2} V.$$

Внутренний фрагмент, удовлетворяющий условию $conv2_test(m_k, P) = -1$, возвращается через аргумент об наряду с признаком отсекаемого отрезка $clip2_test = 1$. При отсутствии внутреннего фрагмента отрезок отсекается полигоном целиком, а возвращаемый признак отсекаемого отрезка равен нулю. □

Из-за наличия теста ориентации $conv2_test$ алгоритм $clip2_test$ имеет большую трудоемкость по сравнению с алгоритмом $clip2_cross$, но его идейная основа лучше приспособлена для решения других задач отсекаемого отрезка:

- при внутреннем отсекаемом отрезке выпуклым полигоном (рис. 1.20, а) отбор неотсекаемых фрагментов выполняется по условию их внешней ориентации $conv2_test(m_k, P) = 1$. Число таких фрагментов может быть от нуля (весь отрезок лежит внутри полигона) до двух (средняя часть отрезка экранируется полигоном);
- при отсекаемом отрезке невыпуклым полигоном необходимо вместо выпуклого теста $conv2_test$ использовать угловые rad_test , oct_test или лучевой $ray2_test$ тесты для определения ориентации средних точек фрагментов относительно произвольного полигона. При внешнем отсекаемом отрезке (рис. 1.20, б) отбираются фрагменты, средние точки которых лежат внутри полигона, а при внутреннем (рис. 1.20, в) — фрагменты со средними точками вне полигона.

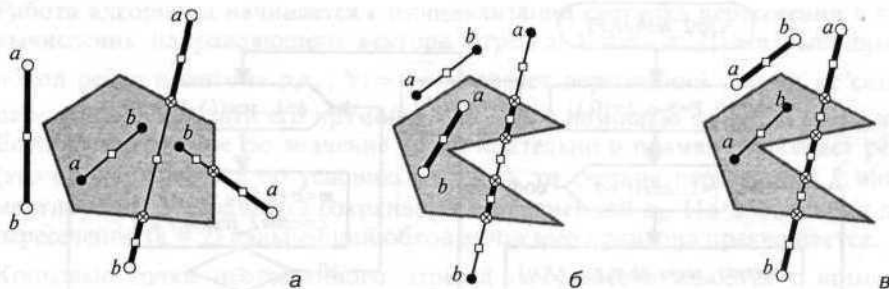


Рис. 1.20

- Пересечение полигона $A = \{a_1, \dots, a_n, a_1\}$ с полигоном $B = \{b_1, \dots, b_m, b_1\}$.

Требуется найти общую часть полигонов, принадлежащую как A , так и B , т. е. их логическое произведение $A \& B$. Здесь мы рассматриваем пересечение только выпуклых полигонов. Логические операции с произвольными полигонами детально изучаются в гл. 4.

Общие принципы расчета пересечения поясним на примере выпуклых полигонов $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_1\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1\}$, изображенных на рис. 1.21, а.

- Сначала функцией $clip2_test(a_i, a_{i+1}, B) \forall i = \overline{1, n}$ выполняем внешнее отсечение ребер полигона A полигоном B , который в этой операции играет роль отсекающей. В результате получаем список отрезков $Ls = \{q_1, a_2, a_2, q_2\}$.
- Далее функцией $clip2_test(b_j, b_{j+1}, A) \forall j = \overline{1, m}$ выполняем внешнее отсечение ребер полигона B отсекающей A и добавляем в список Ls новые отрезки b_1, q_2, q_1, q_4 и q_3, b_1 .
- Из элементов полученного списка

$$Ls = \{q_1, a_2, a_2, q_2, q_3, q_4, b_1, q_2, q_1, q_4, q_3, b_1\}$$

собираем замкнутый контур соединением отрезков друг с другом совпадающими концами. Берем первый отрезок q_1, a_2 , а среди оставшихся элементов списка Ls ищем отрезок, любой из концов которого совпадает с точкой a_2 . Этот отрезок a_2, q_2 образует с q_1, a_2 цепочку $C = \{q_1, a_2, q_2\}$. Среди оставшихся элементов Ls находим продолжение цепочки — отрезок b_1, q_2 . После его присоединения к концу C точкой q_2 цепочка принимает вид $C = \{q_1, a_2, b_1\}$. Продолжая процесс поиска и присоединения отрезков до полного исчерпания списка Ls , получим окончательный вид замкнутого контура

$$C = \{q_1, a_2, q_2, b_1, q_3, q_4, q_1\}.$$

Если полигоны A и B не пересекаются, то после обоюдного внешнего отсечения их ребер список Ls остается пустым, вследствие чего и результат операции $A \& B$ пуст.

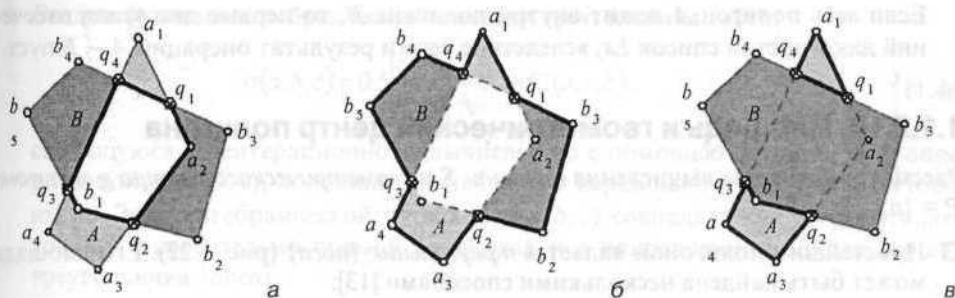


Рис. 1.21

Аналогичным образом формируется *объединение* полигонов $A + B$ (рис. 1.21, б).

- Выполнив *внутреннее* отсечение ребер полигона A отсекателем B , получим список отрезков $Ls = \{a_1 q_1, q_2 a_3, a_4 a_4, a_4 q_3, a_4\}$
- В результате *внутреннего* отсечения ребер полигона B отсекателем A дополняем список Ls отрезками $q_2 b_2, b_2 b_3, b_3 q_1, q_4 b_4, b_4 b_5$ и $b_5 q_3$.
- Из одиннадцати отрезков полученного списка Ls формируем замкнутый контур

$$C = \{a_1 q_1 b_3 b_2 q_2 a_3 a_4 q_3 b_5 b_4 q_4 a_1\}.$$

Если полигоны A и B не пересекаются, то их объединение состоит из двух фрагментов, при сборке которых нужно после присоединения очередного отрезка к имеющейся цепочке сравнить ее новый конец с началом. При совпадении этих точек первый фрагмент собран. Из оставшихся в списке Ls отрезков собираем второй замкнутый контур.

Описанный метод сборки нескольких фрагментов из общего списка их ребер применяется при вычислении *исключения* $A - B$ полигона B из полигона A (рис. 1.21, в).

- Выполнив *внутреннее* отсечение ребер полигона A отсекателем B , получим список отрезков $Ls = \{a_1, q_1, q_2 a_2, a_3 a_4, a_4 q_3, q_4 a_1\}$.
- *Внешнее* отсечение ребер полигона B отсекателем A дополняет список Ls отрезками $b_1 q_2, q_4 a_4$ и $q_3 b_1$.
- Из восьми отрезков полученного списка

$$Ls = \{a_1 q_1, q_2 a_3, a_3 a_4, a_4 q_3, q_4 a_1, b_1 q_2, q_1 q_4, q_3 b_1\}$$

собираем первый замкнутый контур

$$C_1 = \{a_1 q_1 q_3 a_1\}.$$

Из пяти отрезков, оставшихся в списке $Ls = \{q_2 a_3, a_3 a_4, a_4 q_3, b_1 q_2, q_3 b_1\}$, формируем второй фрагмент

$$C_2 = \{q_2 a_3 a_4 q_3 b_1 q_2\}.$$

Если весь полигон A лежит внутри полигона B , то первые два этапа отсечений дают пустой список Ls , вследствие чего и результат операции $A \rightarrow B$ пуст.

1.1.2.10. Площадь и геометрический центр полигона

Рассмотрим методы вычисления площади S и геометрического центра g полигона $P = \{p_1 \dots p_n\}$.

• Простейшим полигоном является *треугольник* $\{abca\}$ (рис. 1.22). Его площадь может быть найдена несколькими способами [13]:

- расчет по формуле **Герона**

$$S_{\Delta} = \sqrt{h(h-|a-b|)(h-|b-c|)(h-|c-a|)},$$

требует вычисления длин его сторон $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ и полупериметра

$$h = \frac{|a-b| + |b-c| + |c-a|}{2}$$

ценой четырех итерационных *приближенных* вычислений квадратного корня. Все эти затраты делают формулу Герона наименее эффективным инструментом расчета площади треугольника;

- известная из тригонометрии формула

$$S_{\Delta} = 0.5|b-a| \cdot |c-a| \cdot \sin(\angle bac),$$

равносильная половине произведения длины стороны ab на длину высоты, опущенной на нее из вершины c , также включает приближенные вычисления длин векторов $V=b-a$, $W=c-a$ и синуса угла между ними;

- сравнение последнего выражения с нормой векторного произведения векторов

$\vec{V} = [V_x \ V_y \ 0] \in xy$ и $\vec{W} = [W_x \ W_y \ 0] \in xy$ позволяет записать его в виде

$$S_{\Delta} = 0.5|\vec{V} \times \vec{W}| = 0.5 \left| \begin{vmatrix} b-a \\ c-a \end{vmatrix} \right|.$$

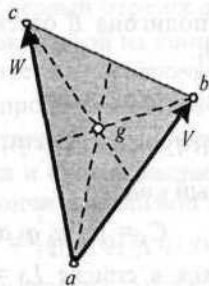


Рис. 1.22

Введем функцию алгебраической площади треугольника $\{abca\}$

$$\sigma(a, b, c) = 0.5 \left| \begin{array}{c} b-a \\ c-a \end{array} \right| = 0.5nf2(a, c, b), \quad (1.46)$$

сводящуюся к неитерационному вычислению с помощью функции и/2, определенной в (1.35, г), половины значения НФ вершины b относительно стороны ac . Знак алгебраической площади $\sigma(a, b, c)$ совпадает как с ориентацией точки b относительно прямой $\{a, c\}$, так и с направлением обхода вершин треугольника $\{abca\}$.

Окончательное выражение площади треугольника принимает следующий вид:

$$S_{\Delta} = |\sigma(a, b, c)|. \quad (1.47, a)$$

Геометрический центр треугольника расположен в точке пересечения его медиан и делит каждую из них в отношении 2:1. Отсюда получаем

$$g = a + \frac{2}{3} \left(\frac{b+c}{2} - a \right) = \frac{a+b+c}{3}. \quad (1.47, б)$$

- Выпуклый полигон $\{p_1 \dots p_n\}$ после разрезания диагоналями, проведенными из вершины p_1 (рис. 1.23), представляет собой объединение $(n-2)$ непересекающихся треугольников $\{p_1 p_2 p_3 p_1\} \cup \{p_1 p_{n-1} p_n p_1\}$, площади которых S_i и геометрические центры g_i вычисляются по (1.47):

$$S_i = |\sigma(p_1, p_i, p_{i+1})|, \quad g_i = \frac{p_1 + p_i + p_{i+1}}{3}. \quad (1.48, a)$$

Представляя совокупность треугольников системой точечных масс S_i закрепленных в точках g_i [15], получим площадь и геометрический центр выпуклого полигона:

$$S = \sum_{i=2}^{n-1} S_i, \quad g = \frac{\sum_{i=2}^{n-1} S_i g_i}{S}. \quad (1.48, б)$$

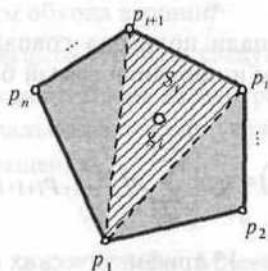


Рис. 1.23

- Площадь невыпуклого полигона можно вычислить по (1.48,6), выполнив его *триангуляцию* — разрезание на непересекающиеся треугольники (рис. 1.24, а). Задача триангуляции произвольного полигона достаточно сложна. Некоторые алгоритмы триангуляции рассматриваются в гл. 4. Между тем, после небольшой модификации метод (1.48) может работать и с невыпуклыми полигонами (рис. 1.24, б):

$$S = \left| \sum_{i=2}^{n-1} \sigma_i \right|, \quad g = \frac{\sum_{i=2}^{n-1} (p_1 + p_i + p_{i+1}) \sigma_i}{3 \sum_{i=2}^{n-1} \sigma_i}, \quad \text{где } \sigma_i = \sigma(p_1, p_i, p_{i+1}). \quad (1.49)$$

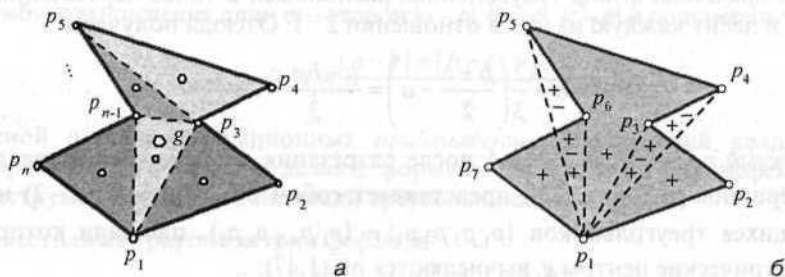


Рис. 1.24

Знаки площадей σ_i треугольников $\{p_1 p_i p_{i+1}\}$ совпадают с направлениями их обхода. Фрагменты треугольников, лежащие вне полигона, суммируются в (1.49) с противоположными знаками четное число раз, в результате чего их площади взаимно сокращаются. Фрагменты треугольников внутри полигона суммируются с противоположными знаками нечетное число раз. Таким образом, алгебраическая площадь полигона включает площади только внутренних фрагментов и только однократно. Геометрический центр полигона также является взвешенной *алгебраической* суммой центров треугольников с учетом знаков их площадей.

Знак алгебраической площади полигона совпадает с общим направлением обхода его вершин. Вот мы и получили самый быстрый **тест направления обхода полигона**

$$\text{dir_test}(P) = \text{sgn} \left(\sum_{i=2}^{n-1} n f 2(p_1, p_{i+1}, p_i) \right), \quad (1.50)$$

имеющий трудоемкость 8л - 15 арифметических операций. По эффективности тест (1.50) даст сто очков вперед полученным в (1.44) радианному и октантному тестам направления обхода полигона.

1.1.2.11. Алгоритмы генерирования случайных полигонов

В процессе создания и отладки алгоритмов компьютерной графики необходимы образцы различных графических объектов, служащие исходными данными для моделирования. Принципиально различаются два типа данных:

- задаваемые *вручную* и позволяющие добиться верного решения задачи при заранее известном ответе. Сложность ручного задания заключается в искусстве заранее предвидеть все нюансы задачи, поставить нужные цифры в нужное место так, чтобы за минимальное число испытаний пройти по всем ветвям алгоритма и добиться его правильной работы;
- задаваемые *случайно* и позволяющие увеличить объем и статистическую достоверность работы алгоритма. При большом числе испытаний со случайными исходными данными и хорошо продуманной системой диагностики рано или поздно должны быть обнаружены все имеющиеся в алгоритме ошибки вычислительного характера.

Имея в распоряжении функцию $rnd(x)$ — генератор равномерно распределенных случайных чисел (РРСЧ) в интервале $(0, \pi)$, можно построить генераторы других типов случайных равномерно распределенных данных:

- $a + rnd(b - a)$ — генератор РРСЧ в интервале (a, b) ;
- $[n + rnd(m + 1 - n)]$ — генератор целых РРСЧ в интервале $[n, m]$;
- $V_i = a + rnd(b - a) \quad \forall i = \overline{1, n}$ — генератор случайного вектора $V \in \mathbb{R}^n$, элементы которого есть РРСЧ в интервале (a, b) ;
- $V = [\cos(\varphi) \quad \sin(\varphi)]$ — генератор единичного вектора на плоскости со случайным углом направления $\varphi = rnd(2\pi)$;
- $V = [\sin(\varphi)\sin(\psi) \quad \cos(\psi) \quad \cos(\varphi)\sin(\psi)]$ — генератор единичного вектора в трехмерном пространстве со случайными углами места $\varphi = rnd(2\pi)$ и азимута $\psi = rnd(\pi)$ (см. рис. 1.1, б).

Разработаем два алгоритма генерирования *случайных полигонов* — системы *случайного* количества (не менее трех) *случайных* точек на плоскости, последовательно соединенных друг с другом не пересекающейся замкнутой ломаной линией со *случайным* направлением обхода вершин.

- *Случайный произвольный полигон* строится следующим методом (рис. 1.25, а).

▣ **Шаг 1.** Из заданной точки T как из центра проводим лучи под углами $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ к оси x . Начальное значение угла $\varphi_1 = 0^\circ$, а последующие углы рассчитываем путем приращения

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta\varphi_n$$

на случайные значения $\Delta\varphi_n = rnd(\Theta)$. Максимальное приращение углов $120^\circ < \Theta \leq 180^\circ$ выбираем с таким расчетом, чтобы минимальное число лучей было равно трем.

Шаг 2. Вдоль лучей откладываем расстояния

$$r_n = a + \text{rnd}(b - a),$$

генерируемые как РРСЧ в интервале (a, b) . Таким образом, получаем вершины полигона

$$p_n = T + r_n [\cos(\varphi_n) \quad \sin(\varphi_n)], n = 1, 2, \dots$$

Шаг 3. Генерируем РРСЧ $d = \text{rnd}(2)$, равномерно принадлежащее как интервалу $(0, 1)$, так и интервалу $[1, 2)$. При $d \geq 1$ нумеруем вершины полигона P в обратном порядке.

Шаг 4. Возврат P . \square

Вплощая описанный метод в алгоритм, получаем функцию $\text{rpoly}(T, a, b, \Theta)$ генерирования случайного произвольного полигона (рис. 1.25, б).

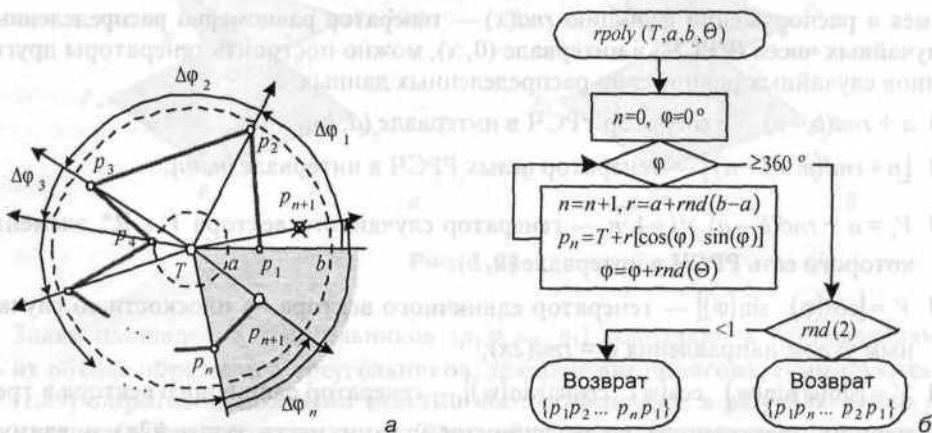


Рис. 1.25

Автором проведен статистический анализ числа сторон генерируемых полигонов в зависимости от параметра $\Theta \in \{90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ\}$ на выборке в 10 000 испытаний. Процентное соотношение «-угольников» приведено на рис. 1.26. Соотношение положительных и отрицательных направлений обхода оказалось очень близким к 1 : 1.

- Случайный выпуклый полигон строится следующим методом (рис. 1.27, а).

\square Шаг 1. Размещаем первую вершину полигона p_1 в исходной точке T и задаем начальный угол $\varphi_1 = 0^\circ$. Очередную вершину p_{n+1} $n = 1, 2, \dots$ получаем путем проведения из предыдущей вершины p_n луча под углом

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta\varphi_n$$

со случайным приращением $\Delta\varphi_n = rnd(\Theta)$ и откладывания вдоль этого луча расстояния

$$r_n = a + rnd(b - a),$$

генерируемого как РРСЧ в интервале (a, b) . Максимальное приращение углов $90^\circ < \Theta \leq 180^\circ$ выбираем с таким расчетом, чтобы минимальное число лучей было равно трем.



Рис. 1.26

Шаг 2. Полученную точку

$$q = p_n + r_n [\cos(\varphi_n) \quad \sin(\varphi_n)]$$

тестируем, начиная со значения $n = 2$, на пригодность быть вершиной *выпуклого* полигона, т. е. на попадание в заштрихованную область. Точка q должна, во-первых, лежать левее прямой $\{T, p_2\}$, во-вторых, — правее прямой $\{p_n, T\}$. Только при одновременном выполнении этих условий сохраняем точку q как очередную вершину полигона p_{n+1} .

Шаг 3. По окончании цикла генерируем РРСЧ $d = rnd(2)$, равновероятно принадлежащее как интервалу $(0, 1)$, так и интервалу $[1, 2)$. При $d \geq 1$ переставляем вершины полигона P в обратном порядке.

Шаг 4. Возврат P . \square

Вплощая описанный метод в алгоритм, получаем **функцию $rcpoly(T, a, b, \Theta)$ генерирования** случайного выпуклого полигона (рис. 1.27, б).

Гистограммы числа сторон генерируемых полигонов в зависимости от параметра $\Theta \in \{90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ\}$ на выборке в 10 000 испытаний приведены на рис. 1.28. Соотношение положительных и отрицательных направлений обхода оказалось практически равным.

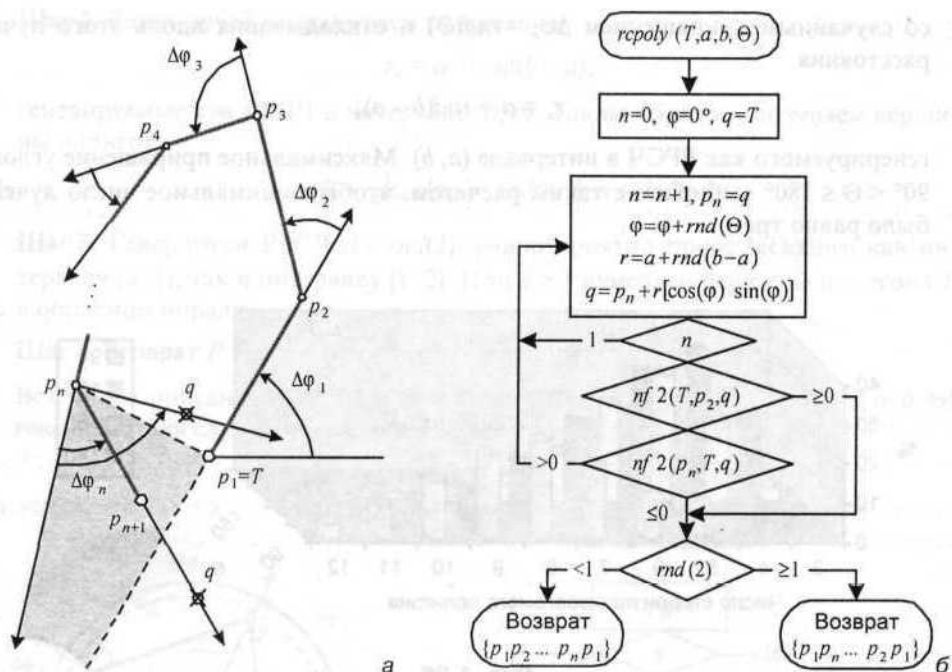


Рис. 1.27

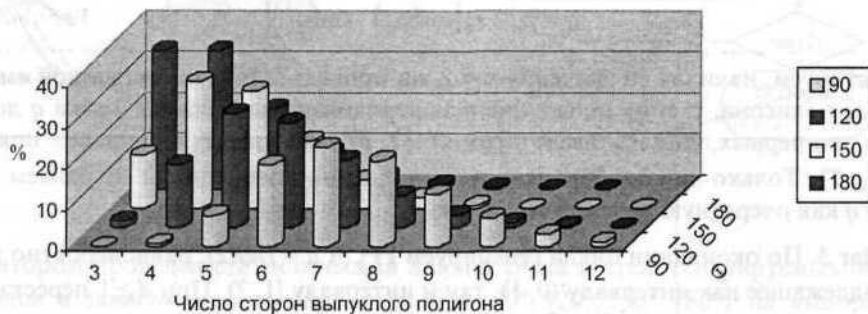


Рис. 1.28

1.1.3. Квадратичные и параметрические кривые

Кривые второго порядка (*квадратичные кривые*) на плоскости описываются координатным уравнением в НФ

$$f(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Exy + 2Gx + 2Jy + D = 0 \quad (1.51, a)$$

или в векторном виде

$$f(p) = \tilde{p}F\tilde{p}^T = 0, \text{ где } F = \begin{bmatrix} A & E & G \\ E & B & J \\ G & J & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21}^T \\ F_{21} & D \end{bmatrix}, F_{11}^T = F_{11}. \quad (1.51, б)$$

Вектор нормали к кривой в точке $p_0 \in f(p)$ вычисляется по (1.7, а) путем дифференцирования (1.51):

$$N = 2[x_0 \ y_0 \ 1] \begin{bmatrix} A & E \\ E & B \\ G & J \end{bmatrix} = 2[p_0 \ 1] \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} = 2(p_0 F_{11} + F_{21}). \quad (1.52)$$

Для любой квадратичной кривой три величины

$$I_1 = A + B, \quad I_2 = |F_{11}| = AB - E^2, \quad I_3 = |F| \quad (1.53, а)$$

называются *инвариантами*, не изменяющими значения относительно невырожденных преобразований переноса и вращения, изучаемых в гл. 2. Число

$$I_2' = \begin{vmatrix} A & G \\ G & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & J \\ J & D \end{vmatrix} = I_1 D - G^2 - J^2 \quad (1.53, б)$$

есть *полуинвариант* относительно преобразования вращения. Знание легко вычисляемых инвариантов и полуинварианта позволяет быстро определить тип и каноническое уравнение кривой по уравнениям (1.51) и табл. 1.2.

Таблица 1.2

I_3		I_2		Невырожденные кривые с $I_3 \neq 0$	Вырожденные кривые с $I_3 = 0$
Центральные кривые с $I_2 \neq 0$	$I_2 \neq 0$	$\frac{I_3}{I_1} < 0$	Действительный эллипс $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$	Точка вырожденного эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	
		$\frac{I_3}{I_1} > 0$	Мнимый эллипс $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 1 = 0$		
	$I_2 \neq 0$		Гипербола $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$	Две асимптоты вырожденной гиперболы $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	

Таблица 1.2 (окончание)

$I_2 \backslash I_3$	Невырожденные кривые с $I_3 \neq 0$	Вырожденные кривые с $I_3 = 0$
Нецентральные кривые с $I_2 = 0$	Парабола $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{y}{b} = 0$	$I_2' < 0$ Две параллельные прямые $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 = 0$
		$I_2' = 0$ Мнимая прямая $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1 = 0$
		$I_2' > 0$ Одна двойная прямая $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1 = 0$

Неявная форма непригодна для построения кривых и используется для анализа их свойств по инвариантам и расчета пересечений. Исключением являются редкие случаи функций, явно выраженных через одну из координат.

Рассмотрим взаимное расположение квадратичной кривой и прямой линии. Подставим параметрическое уравнение прямой $p(t) = q + Vt$ в неявное векторное уравнение (1.51, б):

$$\begin{aligned}
 [q + Vt \quad 1] \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21}^T \\ F_{21} & D \end{bmatrix} [q + Vt \quad 1]^T &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (q + Vt)F_{11}(q + Vt)^T + 2(q + Vt)F_{21}^T + D &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Раскрыв скобки, получим квадратное уравнение

$$at^2 + 2bt + c = 0 \tag{1.55, а}$$

с коэф $a = VF_{11}V^T, b = (qF_{11} + F_{21})V^T, c = qF_{11}q^T + 2qF_{21}^T + D. \tag{1.55, б}$

$$a = VF_{11}V^T, b = (qF_{11} + F_{21})V^T, c = qF_{11}q^T + 2qF_{21}^T + D. \tag{1.55, в}$$

В зависимости от их э $d = b^2 - ac \tag{1.55, в}$

возможны следующие решения задачи пересечения прямой с квадратичной кривой (рис. 1.29):

- при $\{a \neq 0\} \cap \{d > 0\}$ прямая (1) пересекает кривую в двух различных точках $p_1 = q + \sqrt{t_1}$ и $p_2 = q - \sqrt{t_2}$ с параметрами

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{a} < t_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{a}; \quad (1.56, a)$$

- при $\{a \neq 0\} \cap \{d = 0\}$ прямая (2) касается кривой в единственной точке $P_1 = q + \sqrt{t_1}$ с параметром

$$t_1 = \frac{-b}{a}; \quad (1.56, б)$$

- при $\{a = 0\} \cap \{b \neq 0\}$ прямая (3) пересекает кривую в единственной точке $p_1 = q + \sqrt{t_1}$ с параметром

$$t_1 = \frac{-c}{2b}; \quad (1.56, в)$$

- при $\{a = 0\} \cap \{b = 0\} \cap \{c = 0\}$ прямая касается вырожденной нецентральной кривой (прямой линии) в бесконечном множестве точек;
- в остальных случаях прямая (4) не имеет с кривой ни одной общей точки.

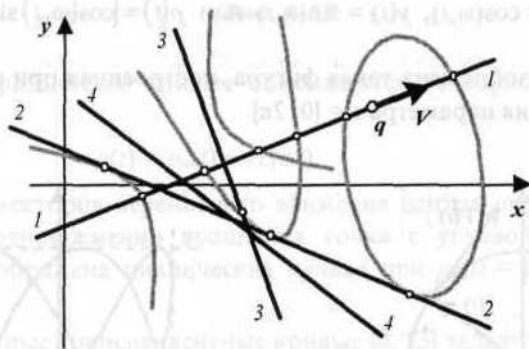


Рис. 1.29

Параметрическая форма как самая гибкая и универсальная наиболее распространена для описания и построения геометрических объектов благодаря разнообразию выбора функций, задающих движение точки по направлениям ее степеней свободы. Параметрическая функция $p(t)$ квадратичной кривой может быть получена следующими способами.

- **Заменой аргументов x и y канонического уравнения** из табл. 1.2 функциями одного параметра (например, t) на основе известных тождеств

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \quad \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1.$$

Простейший пример — *окружность единичного радиуса*. Ее каноническое уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ допускает подстановку

$$x(t) = \sin(t), \quad y(t) = \cos(t).$$

- **Суперпозицией одновременных движений точки вдоль координатных осей** из заданного начального положения. Например, сложение гармонических колебаний по осям координат $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, записываемое в векторной форме как

$$c(t) = \cos(t)x^0 + \sin(t)y^0 = [\cos(t) \quad \sin(t)] \forall 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (1.57)$$

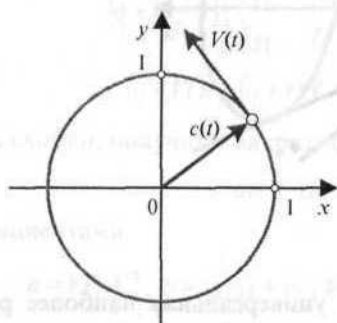
дает вращение точки по окружности единичного радиуса из начального положения $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ (рис. 1.30, а). Направление вычисленного по (1.7, б) вектора скорости $V(t) = [-\sin(t) \quad \cos(t)] \perp c(t)$ ортогонально влево от вектора $c(t)$ соответствует вращению точки против часовой стрелки.

Вращательное движение является основой для построения более сложных *трансцендентных* кривых: фигур Лиссажу, спиральных, циклических и полярных.

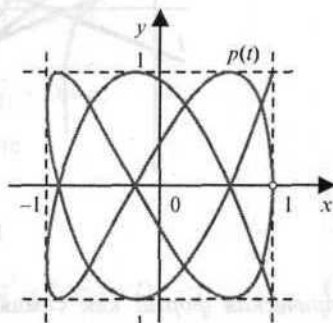
- **Фигуры Лиссажу** образуются суперпозицией разночастотных колебаний вдоль ортов СК:

$$x(t) = \cos(\omega_x t), \quad y(t) = \sin(\omega_y t) \quad \text{или} \quad p(t) = [\cos(\omega_x t) \quad \sin(\omega_y t)].$$

На рис. 1.30, б изображена такая фигура, построенная при $\omega_x = 4$, $\omega_y = 7$ в интервале изменения параметра $t \in [0, 2\pi]$.



а



б

Рис. 1.30

- *Спиральные кривые* описываются моделью $p(t) = r(t)c(t)$ и образуются вращением точки по дуге монотонно изменяющегося радиуса $r(t)$. Примеры:
 - *спираль Архимеда* (рис. 1.31, а) имеет равномерно увеличивающийся радиус $r(t) = r_0 + r_1 t$;
 - *спираль Бернулли* (рис. 1.31, б) образуется при экспоненциально изменяющемся радиусе $r(t) = r_0 e^{kt}$;
 - радиус *параболической спирали*, изображенной на рис. 1.31, в, описывается зависимостью $r(t) = r_0 + r_1 \sqrt{t}$.

Параметры $r_0 = r(0)$ и r_1 задают начальный радиус и характеристику его изменения за один оборот спирали, т. е. за приращение t на 2π .

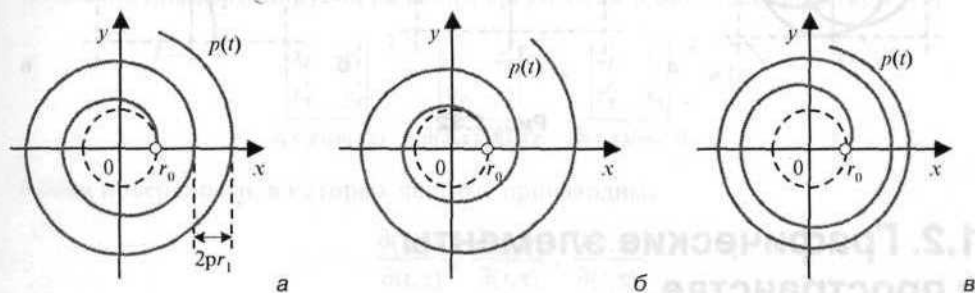


Рис. 1.31

- Простейшие *циклические кривые* описываются векторной параметрической функцией

$$p(t) = p_u(t) + rc(\omega t), \tag{1.58}$$

где $p_u(t)$ — траектория переносного движения центра окружности радиуса r , по которой одновременно вращается точка с угловой скоростью ω . На рис. 1.32, а изображена циклическая кривая при $p_u(t) = 3c(t)$, $r = 2$, $\omega = 3.5$ и $t \in [0, 4\pi]$.

- Многие известные трансцендентные кривые [8, 13] задаются *полярной функцией* $r(\varphi)$. После подстановки

$$t = \varphi, x(t) = r(t)\cos(t), y(t) = r(t)\sin(t)$$

получим параметрическую функцию кривой $p(t) = r(t)c(t)$. Например:

- *улитка Паскаля* (рис. 1.32, б) описывается следующими соотношениями в неявной, полярной и параметрической формах:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0,$$

$$r(\varphi) = a \cdot \cos(\varphi) + b, p(t) = (a \cdot \cos(\varphi) + b)c(t);$$

- *трисектриса* (рис. 1.32, в) описывается соотношениями

$$x^2(x - a + b) + y^2(x + b) = 0,$$

$$r(\varphi) = a \cos(\varphi) - \frac{b}{\cos(\varphi)}, \quad p(t) = \left(a \cos(t) - \frac{b}{\cos(t)} \right) c(t).$$

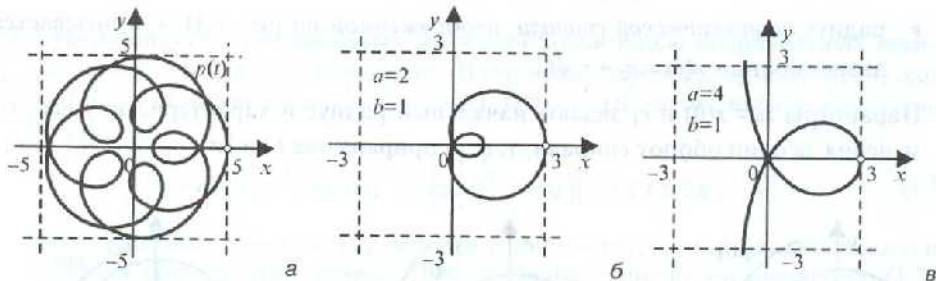


Рис. 1.32

1.2. Графические элементы в пространстве

Точка в пространстве имеет три степени свободы. Расстояние $|r_1 - r_2|$ между двумя точками r_1 и r_2 в разных системах координат вычисляется следующим образом:

- в декартовой СК

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2};$$

- в цилиндрической СК

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (y_1 - y_2)^2};$$

- в сферической СК

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 (\sin(\psi_1)\sin(\psi_2) + \cos(\psi_1)\cos(\psi_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + (y_1 - y_2)^2}.$$

Поверхность имеет две степени свободы. Уравнения поверхности в неявной и параметрической формах имеют следующий вид:

$$\text{НФ:} \quad f(x, y, z) = 0 \quad \text{или} \quad f(\rho) = 0; \quad (1.59, a)$$

$$\text{ПФ:} \quad p(t, \tau) = [x(t, \tau) \quad y(t, \tau) \quad z(t, \tau)]. \quad (1.59, б)$$

Любая реальная поверхность ограничена в пространстве либо в силу своей замкнутости (например, сфера, эллипсоид или тор), либо благодаря системе *неравенств*, наложенных на ее координаты или параметры:

$$\text{НФ:} \quad \psi(x, y, z) \geq 0 \text{ или } \psi(p) \geq 0; \quad (1.60, a)$$

$$\text{ПФ:} \quad \psi(t, \tau) \geq 0. \quad (1.60, б)$$

Особенность ограниченной поверхности в том, что при расчете ее пересечения с другим графическим объектом могут быть получены точки или линии, лежащие на поверхности (1.59), но не удовлетворяющие условиям (1.60). Следовательно, **результат пересечения должен всегда тестироваться по всем необходимым условиям существования.**

В регулярной точке поверхности $p_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0] = p(t_0, \tau_0)$ функция $p(t, \tau)$ непрерывно дифференцируема по своим аргументам и обладает свойством [13]

$$\begin{vmatrix} x'_t & y'_t \\ x'_\tau & y'_\tau \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'_t & z'_t \\ y'_\tau & z'_\tau \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_t & x'_t \\ z'_\tau & x'_\tau \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\tau)} \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,\tau)} \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(t,\tau)}$

Точки поверхности, в которых частные производные

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\tau)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,\tau)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(t,\tau)}$$

равны нулю или не существуют, называются *особыми*. Эти точки образуют *ребра* (линии самопересечения поверхности или пересечения двух поверхностей) и *вершины* (точки пересечения трех поверхностей), где производные не определены.

В регулярной точке поверхности p , существует единственная *касательная плоскость* (рис. 1.33), описываемая координатными и векторными уравнениями в неявной и параметрической формах:

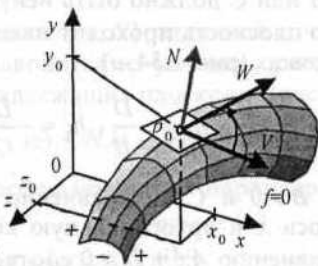


Рис. 1.33

$$\text{НФ: } \begin{cases} N_x(x-x_0) + N_y(y-y_0) + N_z(z-z_0) = 0 \\ N_x = f'_x|_{x_0, y_0, z_0}, N_y = f'_y|_{x_0, y_0, z_0}, N_z = f'_z|_{x_0, y_0, z_0} \end{cases}, \begin{cases} N \circ (p - p_0) = 0 \\ N = \nabla f(p)|_{p_0} \end{cases}; \quad (1.61, a)$$

$$\text{ПФ: } \begin{cases} x(t, \tau) = x_0 + V_x t + W_x \tau, V_x = x'_t|_{p_0}, W_x = x'_\tau|_{p_0} \\ y(t, \tau) = y_0 + V_y t + W_y \tau, V_y = y'_t|_{p_0}, W_y = y'_\tau|_{p_0} \\ z(t, \tau) = z_0 + V_z t + W_z \tau, V_z = z'_t|_{p_0}, W_z = z'_\tau|_{p_0} \end{cases}, \begin{cases} p(t, \tau) = p_0 + Vt + W\tau; \\ V = p'_t|_{p_0}, W = p'_\tau|_{p_0}; \\ V \times W \neq O_3. \end{cases}; \quad (1.61, b)$$

Вектор нормали $N = \{N_x, N_y, N_z\}$ направлен в ту сторону поверхности, где $f(p) > 0$. Направляющие векторы $V \perp N$ и $W \perp N$ должны быть непараллельны. Они составляют с нормалью

$$N = V \times W = \begin{bmatrix} V_y & V_z \\ W_y & W_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_z & V_x \\ W_z & W_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x & V_y \\ W_x & W_y \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

правую тройку векторов. Это означает, что вращения $V \rightarrow W$, $W \rightarrow N$ и $N \rightarrow V$ происходят в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, находящегося на конце третьего свободного вектора.

1.2.1. Модели плоскости в пространстве

Рассмотрим способы задания плоскости в различных формах.

1.2.1.1. Неявное уравнение плоскости

Неявное уравнение плоскости задается четырьмя коэффициентами A, B, C и D , составляющими вектор $F = [A \ B \ C \ D]$:

$$\text{НФ: } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ или } [p \ 1] \circ F = \tilde{p} \circ F = 0. \quad (1.63)$$

Хотя бы одно из чисел A, B или C должно быть ненулевым. Если все коэффициенты $A \neq 0, B \neq 0$ и $C \neq 0$, то плоскость проходит наклонно ко всем осям координат, пересекаясь с ними в точках (рис. 1.34, a)

$$h_x = -\frac{D}{A}, h_y = -\frac{D}{B}, h_z = -\frac{D}{C}.$$

Но, например, при $A = 0, B \neq 0$ и $C \neq 0$ уравнение $By + Cz + D = 0$ описывает плоскость, параллельную оси x и ортогональную координатной плоскости yz ; при $A \neq 0, B = 0$ и $C = 0$ уравнению $Ax + D = 0$ соответствует плоскость, ортогональная оси x и параллельная плоскости yz .

Плоскость $f(p) \equiv \tilde{p} \circ F = 0$ проходит через начало координат при $f(O_3) = D = 0$. Благодаря ее свойству разделять пространство на два подпространства с проти-

воположными знаками $f(p)$, неявное уравнение позволяет с минимальными вычислительными затратами — за три умножения и три сложения — определить по условию $f(q) = 0$ принадлежность плоскости произвольной точки q , а также ориентацию двух точек a и b относительно плоскости:

□ при $f(a) \cdot f(b) > 0$ эти точки лежат по одну сторону от плоскости;

□ при $f(a) \cdot f(b) < 0$ — по разные стороны от плоскости.

Для перехода от неявного описания плоскости к следующему нормальному описанию необходимо найти любую ее точку p_0 и вектор нормали N . Сравнивая (1.63) с (1.61, я), заключаем, что координатами вектора нормали можно принять коэффициенты неявного уравнения A, B и C :

$$N = [A \ B \ C].$$

Приведем два способа получения точки $p_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]$.

1. Выберем ее в месте пересечения плоскости с осью координат, соответствующей ненулевому коэффициенту в (1.63):

$$p_0 = \text{if} \left(A: \left[\frac{-D}{A} \ 0 \ 0 \right], \text{if} \left(B: \left[0 \ \frac{-D}{B} \ 0 \right], \left[0 \ 0 \ \frac{-D}{C} \right] \right) \right). \quad (1.64, a)$$

Несмотря на легкость понимания, этот способ не самый лучший для программирования из-за наличия альтернативы выбора точки в зависимости от коэффициентов A и B .

2. Вычислим ближайшую к началу координат точку p_0 путем решения МНК-задачи $|p|^2 = p \circ p \rightarrow \min$ с ограничением $p \circ N + D = 0$. Аналогично (1.10, б) решение имеет вид

$$p_0 = \frac{-D}{N \circ N} N = \frac{-D}{A^2 + B^2 + C^2} [A \ B \ C]. \quad (1.64, б)$$

1.2.1.2. Нормальное уравнение плоскости

Нормальное уравнение плоскости $\{p, N\}$, заданной точкой p_0 и вектором нормали N , совпадает с (1.12, а) и выводится из условия ортогональности векторов N и $p - p_0$ для всех точек p , принадлежащих плоскости (рис. 1.34,):

$$\text{НФ:} \quad N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0 \text{ или } (p - p_0) \circ N = 0. \quad (1.65)$$

Зависимость вектора неявного уравнения от параметров нормального уравнения совпадает с (1.13):

$$F = [N - p_0 \circ N]. \quad (1.66)$$

С помощью функции

$$f(p) = (p - p_0) \circ N \quad (1.67)$$

можно определить ориентацию точки p относительно плоскости:

- при $f(a) > 0$ точка a лежит в том полупространстве, куда направлена нормаль, а угол $\langle (a - p_0), N \rangle$ острый;
- при $f(b) < 0$ угол $\langle (b - p_0), N \rangle$ тупой, а точка b и нормаль находятся по разные стороны от плоскости.

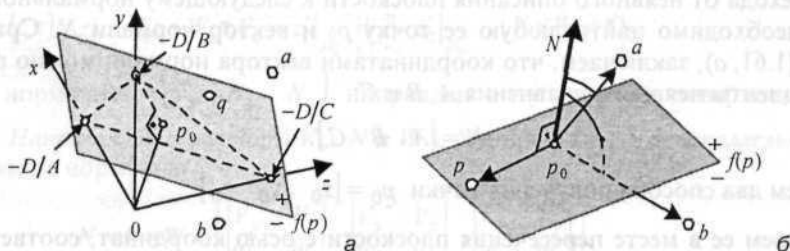


Рис. 1.34

Таким образом, плоскость является *двусторонней* границей, разделяющей пространство R^3 на положительное и отрицательное полупространства в соответствии со знаком функции $f(p)$. Назовем сторону плоскости, обращенную в положительное полупространство, *лицевой*, а обратную сторону — *нелицевой*.

1.2.1.3. Параметрическая функция плоскости

Параметрическая функция плоскости $\{p_0, V, W\}$, заданной точкой p_0 и направлениями линейно независимых векторов V и W (рис. 1.35,а), имеет следующий вид:

$$\text{ПФ: } \begin{cases} x(t, \tau) = x_0 + V_x t + W_x \tau; \\ y(t, \tau) = y_0 + V_y t + W_y \tau; \\ z(t, \tau) = z_0 + V_z t + W_z \tau. \end{cases} \quad \text{или } p(t, \tau) = p_0 + Vt + W\tau; \quad (1.68)$$

Условие линейной независимости направляющих векторов эквивалентно условию их непараллельности $V \times W \neq O_3$.

Параметрическая форма удобна для задания как всей бесконечной плоскости, так и ее полубесконечных и конечных частей. Для этого в (1.68) задаются соответствующие интервалы изменения параметров t и τ . Например:

- бесконечные интервалы $-\infty < t < \infty$ и $-\infty < \tau < \infty$ не ограничивают протяженность бесконечной во всех направлениях *плоскости*;
- задание бесконечного $-\infty < t < \infty$ и полубесконечного $\tau \geq 0$ интервалов определяет *полуплоскость*, находящуюся от прямой $p_0 + Vt$ по одну сторону с вектором W ;

- бесконечный $-\infty < t < \infty$ и конечный $0 \leq \tau \leq 1$ интервалы задают *полосу* шириной W , протяженную вдоль вектора V ;
- конечные интервалы $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq \tau \leq 1$ определяют *параллелограмм* между четырьмя точками $p_0, p_0 + V, p_0 + W$ и $p_0 + V + W$;
- конечные интервалы $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq \tau \leq t$ дают *треугольник* с вершинами в точках $p_0, p_0 + V$ и $p_0 + V + W$.

Переход от параметрического описания плоскости $\{p_0, V, W\}$ к нормальному $\{p_0, N\}$ и неявному $\{F\}$ описаниям заключается в вычислении по (1.62) вектора нормали N , а по (1.66) — вектора F :

$$N = V \times W, F = [N - p_0 \circ N]. \tag{1.69}$$

Ортогональность векторного произведения $V \times W$ к векторам-сомножителям позволяет использовать его в качестве нормали. Эквивалентная (1.67) функция

$$f(p) = (p - p_0) \circ (V \times W) \tag{1.70}$$

определяет ориентацию точки p относительно плоскости $\{p_0, V, W\}$:

- при $f(a) > 0$ точка a лежит в положительном полупространстве, откуда вращение от вектора V до вектора W выглядит положительным (против часовой стрелки). При этом угол $\angle(a - p_0, N)$ острый;
- при $f(b) < 0$ угол $\angle(b - p_0, N)$ тупой, а точка b находится в отрицательном полупространстве (с нелицевой стороны плоскости).

Более сложной является неоднозначная обратная задача выбора подходящих направляющих векторов на основе единственного вектора нормали (рис. 1.35, б). Выберем *произвольный* вектор H , не параллельный N , например, любой из координатных ортов $\omega^0 \# N$, где $\omega \in \{x, y\}$, и по свойству ортогональности векторов в векторном произведении получим желаемое решение:

$$H = \text{if}(N \parallel x^0 : y^0, x^0), V = H \times N \neq O_3, W = N \times V \neq O_3. \tag{1.71}$$

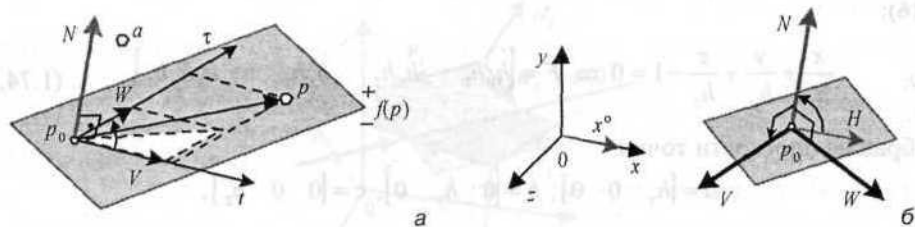


Рис. 1.35

1.2.1.4. Уравнения плоскости, проходящей через три точки

Неявная форма уравнения плоскости, проходящей через три точки a , b и c (рис. 1.36, a), выводится из условия принадлежности плоскости этих точек и точки $p = [x \ y]$:

$$\text{НФ: } \begin{vmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} a_y & a_z & 1 \\ b_y & b_z & 1 \\ c_y & c_z & 1 \end{vmatrix}}_{N_x} x + \underbrace{\begin{vmatrix} a_z & a_x & 1 \\ b_z & b_x & 1 \\ c_z & c_x & 1 \end{vmatrix}}_{N_y} y + \underbrace{\begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}}_{N_z} z + \underbrace{\begin{vmatrix} a_z & a_x & a_y \\ b_z & b_x & b_y \\ c_z & c_x & c_y \end{vmatrix}}_D = 0. \quad (1.72, a)$$

Выбрав направляющие векторы плоскости $V = b - a$ и $W = c - b$, получим параметрическую модель плоскости, проходящей через три точки:

$$\text{ПФ: } \quad p(t) = a + (b - a)t + (c - b)\tau. \quad (1.72, б)$$

Условие существования плоскости следующее: $|N| \neq 0$ или $(b - a) \times (c - b) \neq 0$. Это означает, что три точки не должны лежать на одной прямой.

Эквивалентная (1.70) функция

$$f(p) = (p - a) \circ ((b - a) \times (c - b)) \quad (1.73)$$

позволяет вычислить ориентацию точки p относительно плоскости $\{a, b, c\}$. При $f(p) > 0$ точка p лежит в положительном полупространстве, откуда обход треугольника $\{abca\}$ выполняется против часовой стрелки.

Ниже рассматриваются свойства многогранников (*полиэдров*), обусловленные ориентацией векторов нормалей к их граням. С учетом принятого соглашения (1.8), внешняя ориентация нормалей к граням полиэдра обеспечивается при обходе его граней против часовой стрелки, если смотреть на каждую грань из внешнего полупространства.

1.2.1.5. Уравнения плоскости в отрезках

Неявное уравнение плоскости в отрезках h_x , h_y и h_z , одновременно не равных нулю и отсекаемых плоскостью на осях x , y и z (рис. 1.36, $б$), получим аналогично (1.16):

$$\text{НФ: } \quad \frac{x}{h_x} + \frac{y}{h_y} + \frac{z}{h_z} - 1 = 0 \Rightarrow F = [h_y h_z \quad h_x h_z \quad h_x h_y \quad -h_x h_y h_z]. \quad (1.74, a)$$

Выбрав на плоскости точки

$$a = [h_x \ 0 \ 0], \quad b = [0 \ h_y \ 0], \quad c = [0 \ 0 \ h_z],$$

получим ее направляющие векторы

$$V = b - a = [-h_x \ h_y \ 0], \quad W = c - b = [0 \ -h_y \ h_z],$$

а по (1.72, б) — координатные и векторную функции:

$$\text{ПФ: } \begin{cases} x(t, \tau) = h_x(1-t); \\ y(t, \tau) = h_y(t-\tau) \text{ или } p(t) = [h_x(1-t) \ h_y(t-\tau) \ h_z\tau] \\ z(t, \tau) = h_z\tau. \end{cases} \quad (1.74, б)$$

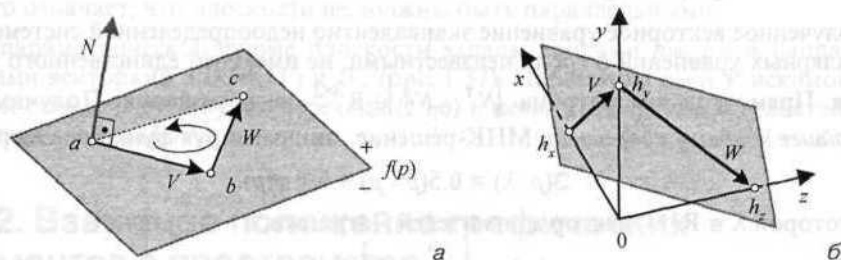


Рис. 1.36

1.2.1.6. Модели линии в пространстве

Линия в пространстве имеет одну степень свободы и является либо пересечением двух поверхностей, либо кинематическим следом движения некоторой точки в пространстве. Соответственно, имеем две формы модели пространственных линий:

$$\text{НФ: } \{f_1(p)=0\} \cap \{f_2(p)=0\}; \quad \text{ПФ: } p(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)].$$

Неявная форма требует решения системы нелинейных уравнений относительно координат x , y , z точки p и для практического применения неудобна. Параметрические функции прямой линии в пространстве в векторном виде полностью совпадают с (1.14, а) и (1.15, б):

$$p(t) = p_0 + Vt \text{ и } p(t) = p_0 + (b-a)t.$$

В координатном виде они дополняются аппликатами

$$z(t) = z_0 + V_z t \text{ и } z(t) = z_0 + (b_z - a_z)t.$$

Получим уравнения прямой как линии пересечения двух плоскостей (рис. 1.37).

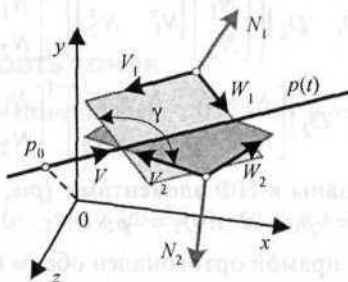


Рис. 1.37

- В неявной форме плоскости заданы векторами $F_1 = [N_1 \ D_1]$ и $F_2 = [N_2 \ D_2]$. Прямая их пересечения $p(t) = p_0 + Vt$ имеет неизвестные элементы p_0 и V . Для их нахождения запишем систему двух уравнений плоскостей (1.63):

$$[p \ 1] \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} = [0 \ 0] \Rightarrow p \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T \end{bmatrix} = [-D_1 \ -D_2]. \quad (1.75)$$

Полученное векторное уравнение эквивалентно недоопределенной системе двух скалярных уравнений с тремя неизвестными, не имеющей единственного решения. Прямоугольная матрица $\begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ не обратима. Получим ближайшее к началу координат МНК-решение, минимизируя функцию Лагранжа

$$\mathfrak{Z}(p, \lambda) = 0.5(p \circ p) + \lambda \circ \varphi(p),$$

в которой $\lambda \in \mathbb{R}^2$ — вектор множителей Лагранжа, а

$$\varphi(p) = p \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T \end{bmatrix} + [D_1 \ D_2]$$

есть соответствующая (1.75) векторная функция связи координат точки p . Дифференцируя $\mathfrak{Z}(p, \lambda)$ по векторным аргументам, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \partial \mathfrak{Z}(p, \lambda) / \partial p = p + \lambda \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = O_3; \\ \partial \mathfrak{Z}(p, \lambda) / \partial \lambda = p \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T \end{bmatrix} + [D_1 \ D_2] = O_2. \end{cases} \quad (1.76)$$

Подставляя решение первого уравнения

$$p = -\lambda \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

во второе, получим вектор множителей Лагранжа

$$\lambda = [D_1 \ D_2] \left(\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

Подстановка его в первое уравнение (1.76) дает МНК-решение уравнения (1.75):

$$\begin{aligned} p_0 &= -[D_1 \ D_2] \left(\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \\ &= -[D_1 \ D_2] \begin{bmatrix} N_1 \circ N_1 & N_1 \circ N_2 \\ N_1 \circ N_2 & N_2 \circ N_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Если обе плоскости заданы в НФ элементами $\{p_{10}, N_1\}$ и $\{p_{20}, N_2\}$, то в (1.77) следует подставить $D_1 = -p_{10} \circ N_1$ и $D_2 = -p_{20} \circ N_2$.

Направляющий вектор прямой ортогонален обеим плоскостям:

$$V = N_1 \times N_2.$$

Условие существования решения $V \neq O_3$ есть также и условие невырожденности обращаемой в (1.77) матрицы:

$$\begin{aligned} |N_1|^2 |N_2|^2 - (N_1 \circ N_2)^2 &= |N_1|^2 |N_2|^2 (1 - \cos^2(\angle N_1 N_2)) = \\ &= |N_1|^2 |N_2|^2 \sin^2(\angle N_1 N_2) \neq 0. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Это означает, что плоскости не должны быть параллельными.

□ В параметрической форме плоскости заданы точками p_{10} , p_{20} и направляющими векторами V_1 , W_1 , V_2 и W_2 (рис. 1.37). Параметры p_{10} и V искомой прямой определяются путем перехода (1.66) к неявным формам плоскостей и решения задачи (1.77).

1.2.2. Взаимное положение графических элементов в пространстве

Рассмотрим некоторые полезные формулы, тесты и алгоритмы, описывающие свойства и взаимное расположение точек, прямых, плоскостей и многогранников (*полиэдров*) в пространстве.

1.2.2.1. Коллинеарность точек

Три точки p_1 , p_2 и p_3 коллинеарны, если

$$(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1) = O_3 \quad \text{или} \quad |(p_2 - p_1) \circ (p_3 - p_1)| = |p_2 - p_1| \cdot |p_3 - p_1|. \quad (1.79, a)$$

Обобщение на произвольное число точек $p_1 + p_n$:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \dots \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} = 2 \quad \text{или} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} p_2 - p_1 \\ p_3 - p_1 \\ \dots \\ p_n - p_1 \end{bmatrix} = 1. \quad (1.79, б)$$

Проверка принадлежности точки p отрезку ab выполняется по тесту (1.18), а значение параметра t , соответствующее положению точки $p = a + (b - a)t$ на прямой относительно отрезка ab , вычисляется по (1.19).

1.2.2.2. Компланарность точек

Четыре точки p_1 , p_2 , p_3 и p_4 компланарны, т. е. лежат в одной плоскости, если

$$\begin{vmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \\ \tilde{p}_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad ((p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1)) \circ (p_4 - p_1) = 0. \quad (1.80)$$

Размерность пространства R^m , натянутого на n точек $p_1 + p_n$, вычисляется на основе определения ранга матрицы как числа ее линейно-независимых строк или столбцов:

$$m = \text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \dots \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} - 1 = \text{rang} \begin{bmatrix} p_2 - p_1 \\ p_3 - p_1 \\ \dots \\ p_n - p_1 \end{bmatrix} \leq \min\{3, n-1\}. \quad (1.81)$$

1.2.2.3. Точка и прямая

Рассмотрим расположение точки q и прямой $p(t) = p_0 + Vt$ (рис. 1.38, а).

Точка принадлежит прямой, если

$$H = O_3, \text{ где } H = (q - p_0) \times V. \quad (1.82)$$

$$\text{Уравнение пересечения} \quad p(t) = q + V_1 t, \text{ где } V_1 = H \times V \quad (1.83)$$

$$p_{\perp}(t) = q + V_{\perp} t, \text{ где } V_{\perp} = H \times V. \quad (1.83)$$

$$\text{Расстояние от } q \text{ до прямой} \quad d = |q - p_0| \sin(\alpha) = |(q - p_0) \times \vec{V}| = \frac{|H|}{|V|}. \quad (1.84)$$

Уравнения плоскости, проходящей через точку q ортогонально прямой, имеют вид:

$$\text{НФ: } \tilde{q} \circ F_{\perp} = 0, F_{\perp} = [V \quad -q \circ V]; \quad \text{ПФ: } p_{\perp}(t, \tau) = q + V_{\perp} t + H \tau. \quad (1.85)$$

1.2.2.4. Точка и плоскость

Рассмотрим расположение точки q и плоскости (рис. 1.38, б).

Точка принадлежит плоскости, если

$$\text{НФ: } \tilde{q} \circ F = 0; \quad \text{ПФ: } (q - p_0) \circ (V \times W) = 0. \quad (1.86)$$

Параметрические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки q на плоскость, имеют вид:

$$\text{НФ: } p_{\perp}(t) = q + Nt; \quad \text{ПФ: } p_{\perp}(t) = q + Nt, N = V \times W. \quad (1.87)$$

Расстояние от точки до плоскости находится так:

$$d = |\text{pr}_N(q - p_0)| = |(q - p_0) \circ \vec{N}| = |(q - p_0) \circ \overline{V \times W}|. \quad (1.88)$$

Зеркальное отражение точки q от плоскости расположено на перпендикуляре к плоскости на расстоянии $2d$ от q сторону, противоположную проекции вектора $q - p_0$ на нормаль N , и вычисляется по формуле (1.26, а).