

Уравнения плоскости, проходящей через точку  $q$  параллельно заданной плоскости, следующие:

НФ:  $\tilde{q} \circ F_{||} = 0, F_{||} = [N \ -q \circ N]$ ; ПФ:  $p_{||}(t, \tau) = q + Vt + W\tau. \quad (1.89)$

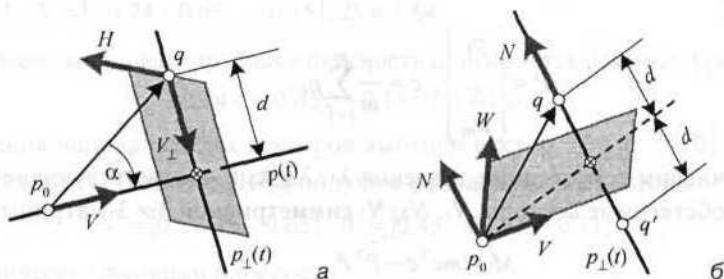


Рис. 1.38

### 1.2.2.5. Построение плоскости, наименее удаленной от совокупности точек

Рассмотрим задачу, связанную с понятием расстояния от точки до плоскости. Допустим, в  $R^3$  задано  $m > 3$  произвольных точек  $p_1 \div p_m$ . Так как в общем случае точки не компланарны, то не существует ни одной плоскости  $f(p) = 0$ , для которой все числа  $d_i = f(p_i)$  обращаются в ноль. Другими словами, расстояния  $d / N$  от точек  $p_i$  до этой плоскости, вычисленные по (1.88) и пропорциональные  $d_i$  не могут быть одновременно все нулевыми (рис. 1.39).

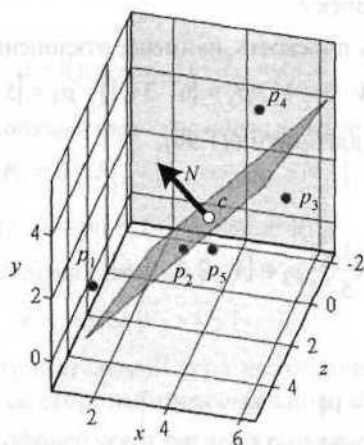


Рис. 1.39

**Алгоритм построения аппроксимирующей плоскости**  $\{p_0, N\}$ , наименее удаленной от совокупности точек  $p_i$ , аналогичен двумерному алгоритму, полученному в (1.29). Применительно к размерности пространства  $n = 3$  он имеет следующий вид.

☞ **Шаг 1.** Сформируем из точек  $p_i$   $m \times 3$ -матрицу  $P$  и найдем их геометрический центр  $c$ :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_m \end{bmatrix}, \quad c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i. \quad (1.90, a)$$

**Шаг 2.** Вычислим собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и соответствующие им *нормированные* собственные векторы  $N_1, N_2, N_3$  симметричной  $3 \times 3$ -матрицы

$$M = mc^T c - P^T P. \quad (1.90, б)$$

**Шаг 3.** Определив собственную пару  $\{\lambda_k, N_k\}$  с *максимальным* значением  $\lambda_k = \max\{\lambda_i\}$ , получим элементы вектора  $F = [N \ D]$  неявного уравнения искомой плоскости (1.63):

$$N = N_k, \quad D = -N \circ c. \quad (1.90, в)$$

□

Вместо неявной формы плоскости можно использовать ее нормальное уравнение  $(p - c) \circ N = 0$ . Для построения более удобна параметрическая форма

$$p(t, \tau) = c + Vt + W\tau,$$

направляющие векторы которой  $V$  и  $W$  находятся по (1.70).

Оставшиеся две собственные пары матрицы  $M$  дают плоскости, ортогональные оптимальной (при различных собственных числах) и пересекающиеся с ней в геометрическом центре точек  $c$ .

☞ **Пример 1.4.** Построить плоскость, наименее отклоненную от точек (см. рис. 1.39)

$$p_1 = [1 \ 0 \ 2], \quad p_2 = [4 \ 3 \ 4], \quad p_3 = [6 \ 3 \ 1], \quad p_4 = [5 \ 5 \ 0], \quad p_5 = [4 \ 1 \ 1].$$

**Решение.** Следуем шагам алгоритма (1.90).

$$\text{Шаг 1. } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 p_i = [4 \ 2.4 \ 1.6].$$

$$\text{Шаг 2. } M = 5c^T c - P^T P = \begin{bmatrix} -14 & -11 & 4 \\ -11 & -15.2 & 3.2 \\ 4 & 3.2 & -9.2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = -3.475, N_1 = [-0.74 \ 0.65 \ -0.15];$$

$$\lambda_2 = -4.865, N_2 = [0.073 \ 0.304 \ 0.95];$$

$$\lambda_3 = -27.06, N_3 = [-0.67 \ -0.69 \ 0.27].$$

Шаг 3.  $\kappa = 1$ ,  $N = [-0.74 \ 0.65 \ -0.15]$ ,  $D = 1.64$ .

Таким образом, аппроксимирующая плоскость описывается неявным уравнением

$$-0.74x + 0.65y - 0.15z + 1.64 = 0.$$

Для получения направляющих векторов выберем вектор  $H = [0 \ 0 \ 0]$ , не параллельный вектору  $N$ . Тогда по (1.70) получим направляющие векторы

$$V = [0 \ 0.15 \ 0.65], W = [0.45 \ 0.49 \ -0.11]$$

и параметрические функции плоскости

$$x(t, \tau) = 4 + 0.45t, y(t, \tau) = 2.4 + 0.15t + 0.49\tau, z(t, \tau) = 1.6 + 0.65t - 0.11\tau.$$

Алгебраические расстояния от заданных точек до этой плоскости равны  $d_1 = 0.594$ ,  $d_2 = 0.026$  (точка  $p_2$  почти лежит в плоскости),  $d_3 = -1$ ,  $d_4 = -0.632$  и  $d_5 = -0.82$ , а минимум функции Лагранжа составляет  $\mathfrak{J}_{\min} = 3.475$ .  $\square$

### 1.2.2.6. Взаимное расположение двух прямых

Исследуем расположение в пространстве двух прямых  $p_1(t_1) = p_{10} + V_1 t_1$  и  $p_2(t_2) = p_{20} + V_2 t_2$  (рис. 1.40).

Прямые совпадают, если

$$\{V_{\perp} = O_3\} \cap \{N_{||} = O_3\}, \text{ где } V_{\perp} = V_1 \times V_2, N_{||} = (p_{20} - p_{10}) \times V_1. \quad (1.91)$$

Прямые параллельны, если  $V_{\perp} = O_3$ . Расстояние между параллельными прямыми равно

$$d = |(p_{20} - p_{10}) \times \bar{V}_1|. \quad (1.92)$$

Уравнения плоскости, проходящей через две параллельные прямые, имеют вид:

$$\text{НФ: } \tilde{p} \circ F_{||} = 0, F_{||} = [N_{||} \ -p_{10} \circ N_{||}]; \quad (1.93, a)$$

$$\text{ПФ: } p(t, \tau) = p_{10} + (p_{20} - p_{10})t + V_1 \tau. \quad (1.93, б)$$

Прямые лежат в одной плоскости при  $(p_{20} - p_{10}) \circ V_{\perp} = 0$ . Угол их пересечения равен

$$\gamma = \arccos(\bar{V}_1 \circ \bar{V}_2) \quad (1.94)$$

и представляет собой неотрицательный угол кратчайшего вращения от вектора  $V_1$  к вектору  $V_2$ , видимого со стороны ортогонального им вектора  $V_{\perp} = V_1 \times V_2$ .

Уравнения плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые, имеют вид:

$$\text{НФ: } \tilde{p} \circ F_x = 0, F_x = [V_{\perp} \ p_{10} \circ V_{\perp}]; \quad (1.95, a)$$

ПФ: 
$$p(t, \tau) = p_{10} + V_1 t + V_2 \tau. \quad (1.95, б)$$

Точка пересечения прямых находится аналогично формуле (1.30, б):

$$q = p_{10} + V_1 t_1 = p_{20} + V_2 t_2, \quad (1.96)$$

где 
$$[t_1 \ t_2] = (p_{20} - p_{10}) \begin{bmatrix} V_1^T & -V_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \circ V_1 & -V_1 \circ V_2 \\ -V_1 \circ V_2 & V_2 \circ V_2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Прямые ортогональны, если  $V_1 \circ V_2 = 0$ .

Прямая, соединяющая скрещивающиеся прямые по кратчайшему пути, имеет направляющий вектор  $V_{\perp} = V_1 \times V_2$  и проходит ортогонально им обеим через точки

$$q_1 = p_{10} + V_1 t_1, \quad q_2 = p_{20} + V_2 t_2.$$

Параметры  $t$  и  $t_i$  находятся по формуле (1.96). Уравнение кратчайшей прямой есть  $p_{\perp}(t) = q_1 + V_{\perp} t$ . Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно

$$d = |q_1 - q_2| = |(p_{20} - p_{10}) \circ \bar{V}_{\perp}|. \quad (1.97)$$

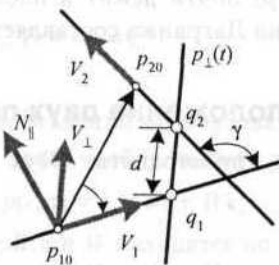


Рис. 1.40

### 1.2.2.7. Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим расположение прямой  $p_f(t) = p_{10} + V_f t$  и плоскости (рис. 1.41).

Прямая принадлежит плоскости, если

НФ: 
$$\{V_1 \circ N = 0\} \cap \{p_{10} \circ F = 0\}; \quad (1.98, а)$$

ПФ: 
$$\{V_1 \circ (V \times W) = 0\} \cap \{(p_{10} - p_0) \circ (V \times W) = 0\}. \quad (1.98, б)$$

Прямая параллельна плоскости, если

НФ: 
$$V_1 \circ N = 0; \quad \text{ПФ:} \quad V_1 \circ (V \times W) = 0. \quad (1.99)$$

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости равно

$$d = |(p_{10} - p_0) \circ \bar{N}| = |(p_{10} - p_0) \circ \bar{V \times W}|. \quad (1.100)$$

Прямая ортогональна плоскости, если

$$\text{НФ: } V_1 \times N = O_3; \quad \text{ПФ: } V_1 \times (V \times W) = O_3. \quad (1.101)$$

Одной из основных задач компьютерной графики является расчет точки пересечения произвольной прямой с плоскостью, аналогичный расчету (1.30) пересечения двух прямых на плоскости:

$$\text{НФ: } \begin{cases} (q - p_0) \circ N = 0 \\ q = p_{10} + V_1 t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{(p_0 - p_{10}) \circ N}{V_1 \circ N} \Rightarrow q = p_{10} + \frac{(p_0 - p_{10}) \circ N}{V_1 \circ N} V_1; \quad (1.102, a)$$

$$\text{ПФ: } q = p_{10} + V_1 t = p_0 + V \tau + W \theta, \text{ где } [t \ \tau \ \theta] = (p_0 - p_{10}) \begin{bmatrix} V_1 \\ -V \\ -W \end{bmatrix}^{-1}. \quad (1.102, б)$$

**Условие существования решения:**  $V_1 \circ N \neq 0$  — прямая не параллельна плоскости.

Угол между прямой и нормалью к плоскости находится аналогично (1.94):

$$\lambda = \arccos(\overline{V_1 \circ N}) = \arccos(\overline{V_1 \circ V \times W}). \quad (1.103)$$

Уравнения плоскости, проходящей через прямую ортогонально заданной плоскости, имеют вид:

$$\text{НФ: } \tilde{p} \circ F_{\perp} = 0, \text{ где } F_{\perp} = [N_{\perp} - p_{10} \circ N_{\perp}], N_{\perp} = V_1 \times N; \quad (1.104, a)$$

$$\text{ПФ: } p(t, \tau) = p_{10} + V_1 t + (V \times W) \tau. \quad (1.104, б)$$

**Условие единственности решения:**  $V_1 \times N \neq O_3$  — прямая не ортогональна плоскости.

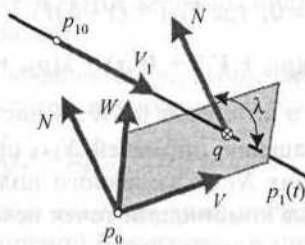


Рис. 1.41

### 1.2.2.8. Две плоскости

Исследуем расположение в пространстве двух плоскостей (см. рис. 1.37).

Плоскости совпадают, если

$$\text{НФ: } \{N_1 \times N_2 = O_3\} \cap \{(p_{20} - p_{10}) \circ N_2 = 0\}; \quad (1.105, a)$$

$$\text{ПФ: } \{(V_1 \times W_1) \times (V_2 \times W_2) = O_3\} \cap \{(p_{20} - p_{10}) \circ (V_2 \times W_2) = 0\}. \quad (1.105, б)$$

Плоскости параллельны, если

$$\text{НФ: } N_1 \times N_2 = O_3; \quad \text{ПФ: } (V_1 \times W_1) \times (V_2 \times W_2) = O_3. \quad (1.106)$$

Расстояние между параллельными плоскостями равно

$$d = \left| (p_{20} - p_{10}) \circ \overline{N_1} \right| = \left| (p_{20} - p_{10}) \circ \overline{V_1 \times W_1} \right|. \quad (1.107)$$

Плоскости ортогональны, если

$$\text{НФ: } N_1 \circ N_2 = 0; \quad \text{ПФ: } (V_1 \times W_1) \circ (V_2 \times W_2) = 0. \quad (1.108)$$

Одной из основных задач компьютерной графики является расчет *прямой пересечения двух плоскостей*, выполненный в (1.75)-(1.78). Здесь дополнительно приведем формулу для вычисления *угла пересечения плоскостей*, аналогичную (1.94):

$$\gamma = \arccos(\overline{N_1} \circ \overline{N_2}) = \arccos(\overline{V_1 \times W_1} \circ \overline{V_2 \times W_2}). \quad (1.109)$$

Уравнения плоскости, проходящей через точку  $p_0$  ортогонально двум плоскостям, имеют следующий вид:

$$\text{НФ: } \tilde{p} \circ F_{\perp} = 0, \text{ где } F_{\perp} = [N_{\perp} - p_0 \circ N_{\perp}], N_{\perp} = N_1 \times N_2; \quad (1.110, a)$$

$$\text{ПФ: } p(t, \tau) = p_0 + (V_1 \times W_1)t + (V_2 \times W_2)\tau. \quad (1.110, б)$$

### 1.2.2.9. Пучок плоскостей и биссекторная плоскость

Уравнения пучка плоскостей, заключенных между двумя плоскостями (рис. 1.42, а), имеют вид:

$$\text{НФ: } \tilde{p} \circ F_{\lambda+1} = 0, \text{ где } F_{\lambda+1} = (1 - \lambda)F_1 + \lambda F_2; \quad (1.111, a)$$

$$\text{ПФ: } p_{\lambda+1}(t, \tau) = (1 - \lambda)(p_{10} + V_1 t + W_1 \tau) + \lambda(p_{20} + V_2 t + W_2 \tau). \quad (1.111, б)$$

Изменение параметра пучка в интервале  $0 \leq \lambda \leq 1$  дает такие промежуточные положения плоскостей, что вращение нормалей  $N_{\lambda+1}$  происходит по *кратчайшему* углу от начального положения  $N_1$  до конечного положения  $N_2$ . Модели (1.111) представляют собой линейные комбинации точек исходных плоскостей, соответствующих равным значениям параметров  $t$  и  $\tau$ .

Параметры *биссекторной плоскости* получаются из (1.111) при  $\lambda = 0.5$  и уравнении длин векторов, определяющих исходные плоскости:

$$F_{\text{бис}} = |N_2|F_1 + |N_1|F_2, V_{\text{бис}} = |V_2|V_1 + |V_1|V_2, W_{\text{бис}} = |W_2|W_1 + |W_1|W_2. \quad (1.112)$$

Расчет биссекторных плоскостей бывает необходим, например, при построении сферы, вписанной в четырехгранник. Ее центр  $o$  лежит в точке пересечения трех биссекторных плоскостей *внутренних* телесных углов, примыкающих к одной из треугольных граней, а радиус  $r$  есть расстояние от точки  $o$  до плоскости любой грани, вычисляемое по (1.88).

## 1.2.2.10. Пересечение плоскостей

Точка пересечения трех плоскостей (рис. 1.42, б) определяется из условия ее принадлежности этим плоскостям:

$$\text{НФ: } [p_x \ 1] \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & F_3^T \end{bmatrix} = 0_3 \Rightarrow p_x = -[D_1 \ D_2 \ D_3] \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T \end{bmatrix}^{-1}; \quad (1.113, a)$$

$$\text{ПФ: } p_x = [p_{10} \circ N_1 \ p_{20} \circ N_2 \ p_{30} \circ N_3] \begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T \end{bmatrix}^{-1}, \quad N_i = V_i \times W_i. \quad (1.113, б)$$

Условие существования единственного решения  $\begin{vmatrix} N_1^T & N_2^T & N_3^T \end{vmatrix} \neq 0$  — линейная независимость нормалей плоскостей, что равносильно существованию и попарной непараллельности линий пересечения плоскостей.

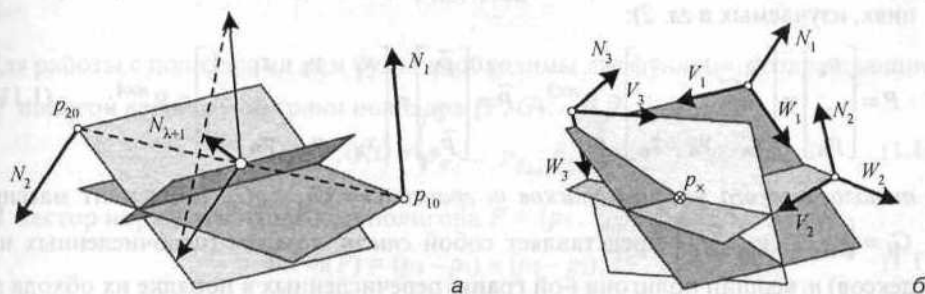


Рис. 1.42

По формулам (1.113) рассчитываются вершины полиэдра как точки пересечения плоскостей трех смежных граней.

Пересечение  $n$  плоскостей в одной точке  $p_x$  вычисляемой по (1.113) на основе параметров первых трех плоскостей, возможно при условии

$$\text{rang} \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & \dots & F_n^T \end{bmatrix} = 3, \quad (1.113, в)$$

аккумулирующем требования *совместности* системы линейных уравнений в (1.113, а), предъявляемое теоремой **Кронекера—Капелли** [8—10] о равенстве рангов матриц  $\begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & \dots & F_n^T \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & \dots & N_n^T \end{bmatrix}$ , и *единственности* ее решения, определяемой полнотой ранга матрицы  $\begin{bmatrix} N_1^T & N_2^T & \dots & N_n^T \end{bmatrix}$ , который должен быть равен трем.

## 1.2.2.11. Модель полиэдра

Переходим к изучению *полиэдров* — замкнутых пространственных объектов, ограниченных плоскостями. Среди объемных тел полиэдры занимают такое же важное место, как и полигоны среди плоских фигур. Благодаря планарности всех

граничных поверхностей полиэдра существенно упрощается расчет его пересечений с различными геометрическими примитивами и другими полиэдрами. Помимо того, что в природе существует множество собственно полиэдральных объектов (пять правильных многогранников, призмы, пирамиды и т. п.), часто криволинейные граничные поверхности аппроксимируют системой полигональных граней, что превращает гладкие объекты в полиэдры.

Подробное изучение свойств полиэдров отложим до гл. 3, а здесь приведем наиболее оптимальную модель полиэдра  $H = \{P, G\}$ , состоящую из двух массивов:

- координатного списка  $p_n$  вершин  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ , пронумерованных в произвольном порядке. Благодаря однородности элементов списка может быть удобнее организовать и использовать вершины полиэдра в виде матрицы вершин в нормальной или расширенной формах (применяется в преобразованиях, изучаемых в гл. 2):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 3}, \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \dots \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 4}; \quad (1.114)$$

- топологического массива списков  $n_r$  граней  $G = \{G_1, \dots, G_{n_r}\}$ . Элемент массива  $G_i = \{g_{i1}, \dots, g_{in_i}, g_{i1}\}$  представляет собой список номеров (целочисленных индексов)  $n_i$  вершин полигона  $i$ -ой грани, перечисленных в порядке их обхода по замкнутому контуру.

В рамках такого метода организации структуры данных полиэдра доступ к его конкретной вершине с номером  $g_j$  осуществляется в два этапа.

1. Из списка  $G_i$  считывается  $j$ -ый элемент  $v = g_j$ .
2. Из списка  $P$  считывается элемент  $p_v$ .

Массив  $G$  содержит сведения о порядке соединения ребрами вершин полиэдра, описанных в списке (матрице)  $P$ . При этом описание каждого ребра, соединяющего вершины  $p_i$  и  $p_j$ , дважды встречается в списках граней либо в виде последовательности  $\{\dots, i, j, \dots\}$ , либо как  $\{\dots, j, i, \dots\}$ .

Для примера построим модель полиэдра, состоящего из  $n_v = 11$  вершин и  $n_r = 7$  граней (рис. 1.43):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad G = \{G_1, G_2, \dots, G_7\}, \quad (1.115)$$

$$\text{где } \begin{cases} G_1 = \{1, 2, 3, 5, 1\}, & G_2 = \{2, 3, 10, 7, 6, 2\}, & G_3 = \{3, 4, 5, 3\}, \\ G_4 = \{3, 4, 9, 10, 3\}, & G_5 = \{7, 8, 9, 10, 7\}, & G_6 = \{5, 4, 9, 8, 11, 1, 5\}, \\ G_7 = \{1, 2, 6, 11, 1\} \end{cases}$$



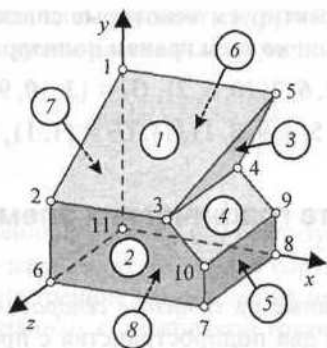


Рис. 1.43

Для работы с полиэдрами нам будут необходимы две функции, возвращающие:

- полигон вершин  $i$ -ой грани полиэдра  $\{P, G\}$ :

$$side(P, G, i) = \{p_{g_{i1}} \dots p_{g_{in}} p_{g_{i1}}\}, \quad (1.116)$$

- вектор нормали к плоскости полигона  $P = \{p_1 \dots p_n p_1\} \in R^3$ :

$$norm(P) = (p_2 - p_1) \times (p_3 - p_2). \quad (1.117)$$

Пространственная ориентация плоскости полигона задается направляющими векторами  $V = p_2 - p_1$ ,  $W = p_3 - p_2$  и нормалью  $N = V \times W$  по первым трем неколлинеарным вершинам  $p_1, p_2$  и  $p_3$ . Со стороны внешнего полупространства, в которое направлена нормаль, обход вершин полигона выглядит положительным, происходящим против часовой стрелки (см. рис. 1.36, а).

Для обеспечения внешней ориентации нормали  $i$ -ой грани полиэдра

$$N_i = V_i \times W_i = norm(side(P, G, i)) \quad (1.118)$$

нужно руководствоваться следующими правилами:

- вершины в списке  $G_i$  должны перечисляться в положительном направлении с точки зрения внешнего наблюдателя;
- если полигон грани не выпуклый, то первые три вершины должны составлять выпуклый угол;
- если направление нумерации вершин в списке  $G_i$  оказалось отрицательным, то следует перенумеровать их в обратном порядке:

$$G_i = \{g_{i1}, g_{in}, \dots, g_{i2}, g_{i1}\};$$

- если нормаль к какой-либо грани не вычисляется по (1.118), а задается внешне ориентированной вручную, то направление обхода вершин в списке этой грани безразлично.

С учетом сказанного скорректируем некоторые списки в (1.115) так, чтобы вычисляемые по (1.118) нормали ко всем граням полиэдра стали внешними:

$$G_2 = \{2, 6, 7, 10, 3, 2\}, G_4 = \{3, 10, 9, 4, 3\},$$

$$G_6 = \{1, 5, 4, 9, 8, 11, 1\}, G_7 = \{1, 11, 6, 2, 1\}.$$

### 1.2.2.12. Тесты свойств графических элементов в пространстве

Рассмотрим тесты, основанные на свойстве сепарабельности плоскости  $f(p) = 0$  разделять пространство на два подпространства с противоположными знаками

**D Тест ориентации точки  $p$  относительно плоскости** заключается в проверке знака числа  $f(p)$ , для вычисления которого в зависимости от способа задания плоскости в разд. 1.2.1 используется соответствующая неявная функция  $nf^*$ :

$$nfF(F, p) = \tilde{p} \circ F; \quad (1.119, a)$$

$$nfN(p_0, N, p) = (p - p_0) \circ N; \quad (1.119, б)$$

$$nfVW(p_0, V, W, p) = (p - p_0) \circ (V \times W) = \begin{vmatrix} p - p_0 \\ V \\ W \end{vmatrix}; \quad (1.119, в)$$

$$nf3(a, b, c, p) = (p - a) \circ ((b - a) \times (c - b)) = \begin{vmatrix} p - a \\ b - a \\ c - b \end{vmatrix}. \quad (1.119, г)$$

Дополнительно определим еще одну функцию ориентации точки  $p$  относительно плоскости полигона  $P = \{p_1 p_2 p_3 \dots p_n p_1\} \in \mathbb{R}^3$ :

$$nfG(P, p) = (p - p_1) \circ \text{norm}(\{p_1 p_2 p_3\}) = \begin{vmatrix} p - p_1 \\ p_2 - p_1 \\ p_3 - p_1 \end{vmatrix}. \quad (1.119, д)$$

Внешнее полупространство, в которое направлена нормаль плоскости, называют *положительным* согласно знаку всех определенных выше функций  $nf^* > 0$ . Для доказательства построим к плоскости  $\{p_0, V, W\}$  нормаль  $N = V \times W$ , выберем точку  $q = p_0 + Vt + W\tau + \lambda N$ , которая при  $\lambda > 0$  лежит во *внешнем* полупространстве, и вычислим, например, значение (1.119, б):

$$nfN(p_0, N, q) = (Vt + W\tau + \lambda N) \circ N = (V \circ N)t + (W \circ N)\tau + \lambda(N \circ N) = \lambda|N|^2 > 0.$$

То, что величина  $f(q)$  не зависит от координат  $t$  и  $\tau$ , отсчитываемых вдоль направляющих векторов  $V$  и  $W$ , означает, что *поверхности постоянных уров-*

ней  $f(p)$  проходят параллельно плоскости  $f(p) = 0$  и также являются плоскостями. Как следствие, получим расстояние от точки  $q$  до плоскости, равное

$$d = |\lambda|N| = \frac{|f(q)|}{|N|}$$

и обобщающее (1.88).

Ввиду простоты вычисления функция  $f(p)$ , реализуемая на практике одной из функций  $nf^*$  в (1.119), идеально подходит для сортировки точек относительно плоскости на внешние, внутренние и лежащие на ней. Тест ориентации применяется в алгоритмах, связанных с обработкой точек, вершин полигонов, а также во многих других трехмерных задачах вычислительной геометрии.

- **Тест пересечения плоскости  $f(p) = 0$  с полиэдром  $H = \{P, G\}$** , имеющим список вершин  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ , идентичен двумерному аналогу (1.36) с блок-схемой, изображенной на рис. 1.9, в и применимой с точностью до имени функции:

$$cross3(f, P) = \{\exists 1 \leq j < i \leq n : f(p_i) \cdot f(p_j) < 0\}. \quad (1.120)$$

**Плоскость пересекает полиэдр, если существует хотя бы одна пара вершин  $\{p_i, p_j\}$ , лежащих от нее по разные стороны.**

Свойство сепарабельности плоскости позволяет по разным знакам значений НФ  $f(p_i)$  и  $f(p_j)$  обнаружить вершины полиэдра  $p_i$  и  $p_j$ , лежащие по разные стороны от пересекающей его плоскости. Если же не найдется ни одной пары разносторонних вершин, то пересечение отсутствует. Функция (1.120) возвращает 1 как признак пересечения. В отсутствие оно тест возвращает -1, а при касании полиэдра с плоскостью вершиной, ребром или гранью — значение 0.

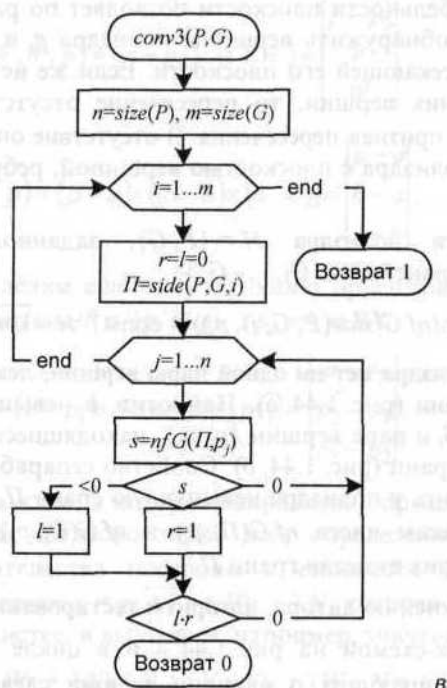
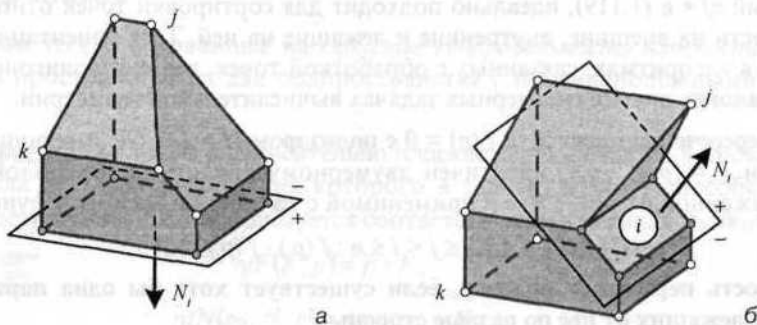
- **Тест выпуклости полиэдра  $H = \{P, G\}$** , заданного списками вершин  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  и граней  $G = \{G_1, \dots, G_m\}$ :

$$conv3(P, G) = \{\text{sgn}(nf G(\text{side}(P, G, i), p_j)) = \text{const}\} \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}: j \in G_i \quad (1.121)$$

**У выпуклого полиэдра нет ни одной пары вершин, лежащих по разные стороны от любой грани** (рис. 1.44, а). Напротив, в невыпуклом полигоне всегда найдутся грань  $G_i$  и пара вершин  $\{p_i, p_j\}$ , находящиеся по разные стороны от плоскости этой грани (рис. 1.44, б). Свойство сепарабельности плоскости позволяет обнаружить у полиэдра невыпуклую грань  $\Pi_i = \text{side}(P, G, i)$  по противоположным знакам чисел  $nfG(\Pi_i, p_i)$  и  $nfG(\Pi_i, p_j)$  в вершинах  $p_i \in \Pi_i$  и  $p_k \notin \Pi_i$ , не входящих в состав грани  $\Pi_i$ .

Наилучший, по мнению автора, алгоритм тестирования выпуклости полиэдра представлен блок-схемой на рис. 1.44, в и в цикле  $i = \overline{1, m}$  использует два флажка, сигнализирующих о наличии вершин слева (флажок  $l$ ) и справа (флажок  $r$ ) от плоскости  $i$ -й грани  $\Pi = \text{side}(P, G, i)$ . В начале внешнего цикла обхода граней оба флажка сбрасываем в ноль. Во внутреннем цикле обхода вершин  $P_j$  вычисляем значение  $s = nfG(\Pi, p_j)$ . Вершину с  $s = 0$ , лежащую в

плоскости грани, пропускаем, а при  $s \neq 0$  инкрементируем один из флажков: / при  $s < 0$  или  $r$  при  $s > 0$ . Тут же по условию  $l \cdot r \neq 0$  проверяем наличие *любой* пары вершин, лежащих по разные стороны от плоскости грани. Если это условие выполняется, то тест немедленно завершается, возвращая 0 как признак невыпуклости полиэдра. После нормального окончания внешнего цикла перебора вершин алгоритм *conv3* возвращает значение 1 — признак выпуклости полиэдра  $H$ .



B

Рис. 1.44

### 1.2.2.13. Тесты ориентации точки относительно полиэдра

Рассмотрим тесты ориентации точки  $q$  относительно полиэдра  $H = \{P, G\}$ , заданного списками вершин  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  и граней  $G = \{G_1, \dots, G_m\}$ .

- Выпуклый тест

$$\text{conv3\_test}(q, P, G) = \begin{cases} -1, & \text{если } f_i < 0 \quad \forall i = \overline{1, m}; \\ 1, & \text{если } \exists i \in [1, m]: f_i > 0; \\ 0, & \text{если не } \pm 1 \end{cases} \quad (1.122)$$

аналогичен плоскому тесту (1.38) и определяет положение точки относительно *выпуклого* полиэдра с *одинаково* ориентированными нормальными (например, всеми внешними) по знакам неявной функции (1.119,  $\partial$ )

$$f_i = nf G(\Pi_i, q), \quad \text{где } \Pi_i = \text{side}(P, G, i).$$

Все *внутренние* точки  $q_{\text{вн}}$  лежат с одинаковых сторон от всех граней  $D$ . Для любой *внешней* точки  $q_{\text{вне}}$  всегда найдется пара граней  $\Pi_i$  и  $\Pi_j$ , относительно которых она расположена с разных сторон. Наконец, все точки, не идентифицированные как внутренние или внешние, считаются *граничными* точками  $q_{\text{гр}}$ , расположенными на гранях, ребрах или вершинах выпуклого полиэдра.

Алгоритм выпуклого теста  $\text{conv3\_test}$  функционирует согласно блок-схеме, показана на рис. 1.45.

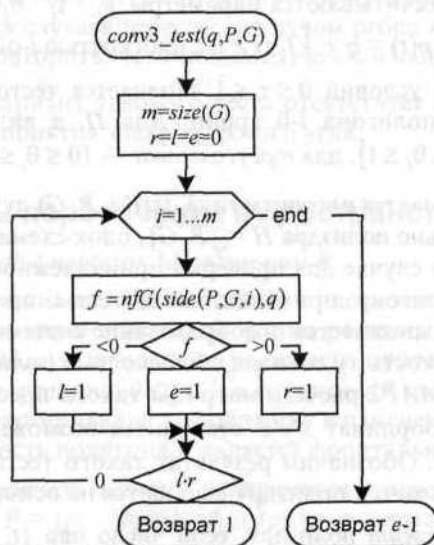


Рис. 1.45

В соответствии со знаком числа 1, возвращаемого тестом для внешних точек, назовем внешнее пространство полиэдра *положительным*. Внутреннее пространство будем считать *отрицательным* по знаку числа -1, возвращаемого алгоритмом для всех точек из этого пространства. Все точки на границе полиэдра (в вершинах, на ребрах или гранях) дают нулевой результат тестирования.

• **Габаритный тест**

$$gab3\_test(q, P) = \{x \notin [x_{\min}, x_{\max}]\} \cup \{y \notin [y_{\min}, y_{\max}]\} \cup \{z \notin [z_{\min}, z_{\max}]\} \quad (1.123, a)$$

определяет по возвращаемому значению  $gab3\_test = 1$  *гарантированную не-принадлежность точки q произвольному полиэдру  $H = \{P, G\}$*  путем сравнения ее координат с габаритными параметрами полиэдра. Тест (1.123, а) легко обобщается на случай полиэдра со списком вершин  $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$ , имеющего габаритные параметры

$$\begin{aligned} q_{x,\min} &= \min\{q_{ix}\}, q_{y,\min} = \min\{q_{iy}\}, q_{z,\min} = \min\{q_{iz}\}, \\ q_{x,\max} &= \max\{q_{ix}\}, q_{y,\max} = \max\{q_{iy}\}, q_{z,\max} = \max\{q_{iz}\}; \end{aligned} \quad (1.123, б)$$

$$gab3\_poly(Q, P) = \bigcup_{\omega \in \{x, y, z\}} \{ \{q_{\omega\max} < \omega_{\min}\} \cup \{q_{\omega\min} > \omega_{\max}\} \}.$$

• **Лучевой 3 d-тест** аналогичен плоскому варианту (см. рис. 1.17, г) со следующими изменениями:

- генерируется вектор  $V \in R^3$  со *случайными* углами места  $\phi = rnd(2\pi)$  и азимута  $\psi = rnd(\pi)$  (см. рис. 1.1, б);
- по (1.102, б) рассчитываются параметры  $[t_i \quad \tau_i \quad \theta_i]$  и точка  $c_i = q + Vt_i$ , пересечения луча  $p(t) = q + Vt \forall t \geq 0$  с плоскостью /-ой грани  $\Pi_i = side(P, G, i)$ ;
- блок проверки условий  $0 \leq \tau_i \leq 1$  заменяется тестом ориентации точки  $c_i$  относительно полигона /-ой грани. Для  $\Pi_i$  в виде *параллелограмма* это  $\{0 \leq \tau_i \leq 1\} \cap \{0 \leq \theta_i \leq 1\}$ , для *треугольника* —  $\{0 \leq \theta_i \leq \tau_i \leq 1\}$ .

В результате получается алгоритм  $ray3\_test(q, P, G)$  **лучевого теста ориентации точки q относительно полиэдра  $H = \{P, G\}$** , блок-схема которого приведена на рис. 1.46. В общем случае для проверки принадлежности точки произвольному плоскому полигону применяются 2d-тесты ориентации (1.38)–(1.45). Предварительно выполняется преобразование системы координат так, чтобы фронтальная плоскость  $xu$  совпала с плоскостью полигона. В гл. 2 рассматривается алгоритм *МАР2* расчета матрицы такого преобразования  $C_k$ . В измененной системе координат  $x'y'z'$  становится возможным применять плоские тесты ориентации. Обозначим результат такого теста  $r_i \in \{-1, 0, 1\}$ . Решение о принадлежности точки полиэдру выносится на основе следующих правил.

**Точка не принадлежит полиэдру**, если число пар  $\{t_i > 0, r_i = -1\}$  равно нулю или *четно*. **Точка лежит внутри полиэдра**, если число этих пар *нечетно*. **Точка принадлежит границе полиэдра**, если имеется хотя бы одна пара  $\{t_i = 0, r_i \leq 0\}$ .

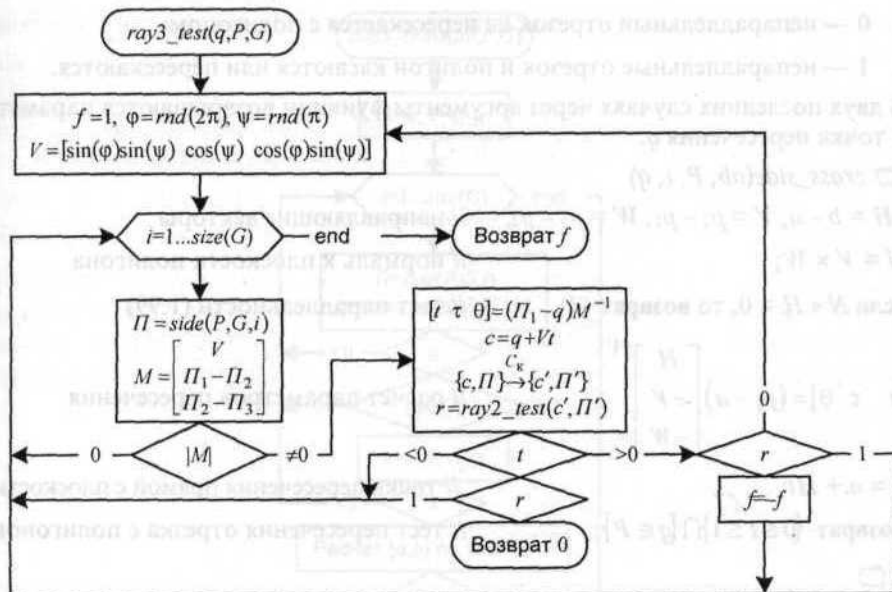


Рис. 1.46

Алгоритм  $ray3\_test$ , использующий 2d-тест  $ray2\_test$ , так же возвращает числа -1, 0 или 1 в соответствии с принятым решением о расположении точки. Все недостатки плоского лучевого теста присущи и его пространственному аналогу. Особенно это касается случаев пересечения лучом ребра или вершины полиэдра, когда требуется повторить тест с новым случайным направлением луча  $V$ .

Пространственный вариант углового теста отсутствует из-за неопределенности геометрического понятия знака телесного угла.

### 1.2.2.14. Алгоритмы пересечения в пространстве

- *Пересечение отрезка  $ab$  с плоским  $id$ -полигоном  $P$ .*

Когда ищется пересечение не просто прямой с плоскостью, а их частей — отрезка с полигоном, то параметрическая форма решения (1.102, б) предпочтительнее неявной (1.102, о) благодаря возможности проверки принадлежности точки  $q$  отрезку  $ab$  по условию  $0 < t < 1$ , а полигону  $P$  по плоскому тесту ориентации. Последнее тестирование выполняется в измененной системе координат, в которой плоскость полигона  $P$  является фронтальной.

Составим алгоритм расчета точки  $q$  и параметра  $t$  пересечения отрезка  $ab$  с плоским полигоном  $P = \{p_1 \dots p_n\}$ . Алгоритм возвращает через свое имя  $cross\_side$  признак пересечения:

- -1 — отрезок и полигон параллельны (не пересекаются) или их плоскости совпадают (точка пересечения не определена);

- 0 — непараллельный отрезок не пересекается с полигоном;
- 1 — непараллельные отрезок и полигон касаются или пересекаются.

В двух последних случаях через аргументы функции возвращаются параметр  $t$  и точка пересечения  $q$ .

□  $cross\_side(ab, P, t, q)$

$\{H = b - a, V = p_2 - p_1, W = p_3 - p_2;$  // направляющие векторы

$N = V \times W;$  // нормаль к плоскости полигона

если  $N \circ H = 0$ , то возврат  $-1;$  // тест параллельности (1.99)

$[t \ \tau \ \theta] = (p_1 - a) \begin{bmatrix} H \\ -V \\ -W \end{bmatrix}^{-1};$  // расчет параметров пересечения

$q = a + Ht;$  // точка пересечения прямой с плоскостью

возврат  $\{0 \leq t \leq 1\} \cap \{q \in P\};$  // тест пересечения отрезка с полигоном

□

- *Пересечение отрезка  $ab$  с полиэдром  $H = \{P, G\}$ , заданным списками вершин  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  и граней  $G = \{G_1, \dots, G_m\}$ .*

Требуется отсечь от отрезка те его части, которые находятся *вне* полиэдра. Здесь мы рассматриваем задачу *внешнего* отсечения отрезка *выпуклым* полиэдром. Другие виды отсечения обсуждаются в гл. 4.

На рис. 1.47 приведен алгоритм  $clip3\_cross(ab, P, G)$  внешнего отсечения отрезка  $ab$  выпуклым полиэдром  $\{P, G\}$ , основанный на расчете пересечений *прямой*  $\{a, b\}$ , несущей отрезок, с *плоскостями* граней полиэдра. Он возвращает через имя  $clip3\_cross$  признак ориентации отрезка относительно полиэдра:

- 0 — отрезок целиком отсечен полиэдром и находится вне его;
- 1 — отрезок весь или частично расположен внутри полиэдра. Через аргумент  $ab$  возвращаются концевые точки не отсеченного полиэдром фрагмента отрезка  $[a, b]$ .

Эти точки рассчитываются с помощью табл. 1.1 в зависимости от значений  $\sigma_1 = t_i$  и  $\sigma_2 = t_j$  параметра  $t$ , при которых прямая пересекла грани  $G_i$  и  $G_j$ . Две ячейки  $\{\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 1\}$  и  $\{\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 0\}$  соответствуют внутреннему положению отрезка, при котором он не отсекается. В ячейках  $\{\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0\}$  и  $\{\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1\}$  формируются отрезки  $[a, a]$  и  $[b, b]$  нулевой длины, которые интерпретируются алгоритмом как полностью отсеченные с возвращением нуля. Остальные ячейки таблицы соответствуют частичному отсечению отрезка  $ab$  и стягиванию его *внешних* концевых точек на границу полиэдра.

Естественное завершение цикла обхода граней означает, что прямая отрезка  $ab$  либо касается полиэдра, либо не пересекает его вовсе. В обоих случаях алгоритм завершается возвращением нуля.



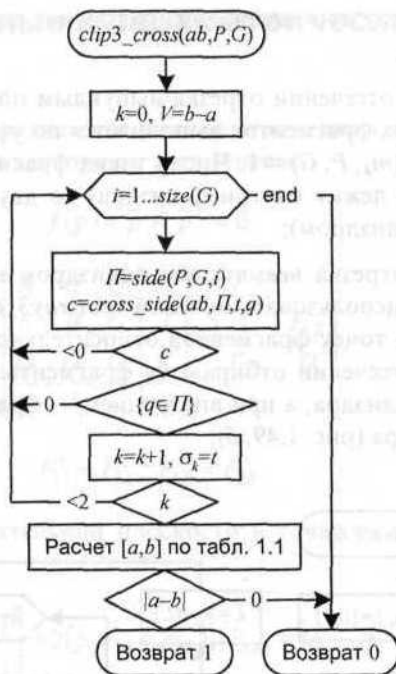


Рис. 1.47

Возможно и *второе решение* задачи отсечения отрезка полиэдром с использованием выпуклого 3d-теста ориентации (1.122). Оно представлено на рис. 1.48 блок-схемой алгоритма *clip3\_test(ab, P, G)* отсечения отрезка *ab* выпуклым полиэдром  $H=\{P, G\}$ . Алгоритм возвращает такие же результаты, что и рассмотренный выше алгоритм *clip3\_cross*. Его идейная основа и словесное описание аналогичны 2d-варианту *clip2\_test* отсечения отрезка полигоном (см. рис. 1.19), в связи с чем они здесь подробно не излагаются. Отметим лишь *отличия* 3d-алгоритма:

- в цикле с переменной  $i$  перебираются грани полиэдра, а не ребра полигона;
- пересечение отрезка  $ab$  с  $i$ -ой гранью  $\Pi = \text{side}(P, G, i)$  рассчитывается функцией  $\text{cross\_side}(ab, \Pi, t, q)$ , возвращающей в случае пересечения признак  $\text{cross\_side} = 1$  и соответствующий параметр  $t \in [0, 1]$ ;
- используется определенный в (1.122) 3d-тест  $\text{conv3\_test}$  ориентации точки относительно выпуклого отсекателя.

Несмотря на то, что алгоритм *clip3\_test* имеет большую трудоемкость в сравнении с алгоритмом *clip3\_cross* (дополнительно выполняется от одного до

трех тестов  $conv3\_test$ ), его идейная основа лучше подходит для решения других задач отсекаения:

- при *внутреннем* отсекаении отрезка выпуклым полиэдром (рис. 1.49, а) отбор неотсекаенных фрагментов выполняется по условию их *внешней* ориентации  $conv3\_test(m_v, P, G) = 1$ . Число таких фрагментов может быть от нуля (весь отрезок лежит внутри полиэдра) до двух (средняя часть отрезка экранируется полиэдром);
- при отсекаении отрезка *невыпуклым* полиэдром нужно вместо выпуклого теста  $conv3\_test$  использовать лучевой тест  $ray3\_test$  для определения ориентации средних точек фрагментов относительно *произвольного* полиэдра. При внешнем отсекаении отбираются фрагменты, средние точки которых лежат внутри полиэдра, а при внутреннем — фрагменты со средними точками вне полиэдра (рис. 1.49, б).

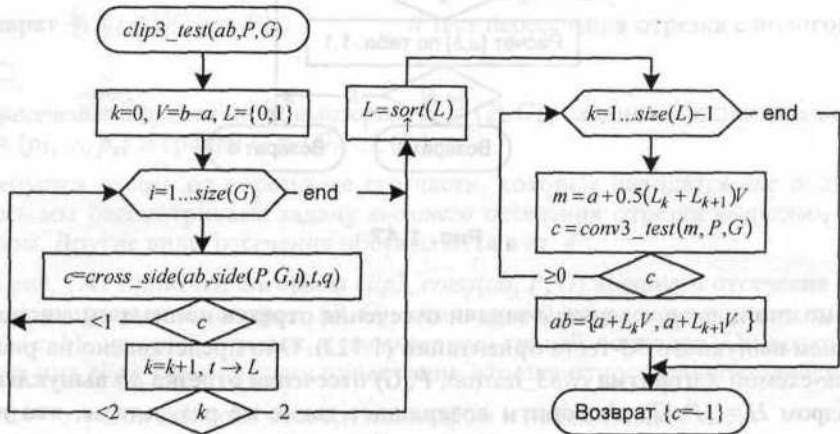


Рис. 1.48

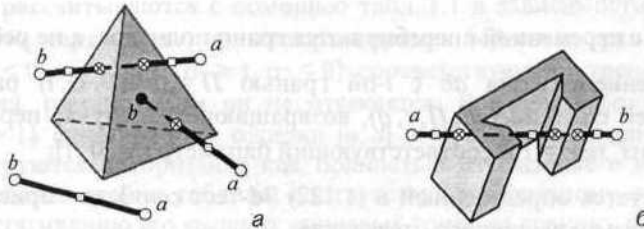


Рис. 1.49

### 1.2.3. Квадратичные и параметрические поверхности

Поверхности второго порядка (*квадратичные поверхности*) описываются уравнением в неявной форме с векторным аргументом:

$$f(p) = \tilde{p} F \tilde{p}^T = 0,$$

где

$$F = \left[ \begin{array}{ccc|c} A & E & Q & H \\ E & B & G & J \\ Q & G & C & K \\ \hline H & J & K & D \end{array} \right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & D \end{bmatrix}, \quad (1.124)$$

$$F_{11}^T = F_{11}, \quad F_{12} = F_{21}^T.$$

Нормаль и матрица касательной плоскости в точке  $p_0 \in f(p)$  в соответствии с (1.61, а) и (1.66) равны

$$N = 2[p_0 1] \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} = 2(p_0 F_{11} + F_{21}), \quad F_{\text{кас}} = [N - p_0 \circ N]. \quad (1.125)$$

Для любой квадратичной поверхности четыре величины

$$I_1 = A + B,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & G \\ G & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & Q \\ Q & C \end{vmatrix}, \quad (1.126, a)$$

$$I_3 = |F_{11}|, \quad I_4 = |F|$$

являются *инвариантами* относительно преобразований переноса и вращения, а числа

$$I'_2 = \begin{vmatrix} A & H \\ H & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & J \\ J & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & K \\ K & D \end{vmatrix},$$

$$I'_3 = \begin{vmatrix} B & G & J \\ G & C & K \\ J & K & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & Q & H \\ Q & C & K \\ H & K & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & E & H \\ E & B & J \\ H & J & D \end{vmatrix} \quad (1.126, б)$$

есть *полуинварианты* относительно преобразования вращения. Они позволяют быстро определить тип и каноническое уравнение поверхности по уравнению (1.124) с помощью табл. 1.3, 1.4.

Таблица 1.3

$I_3$	$I_4$	Невырожденные поверхности, $I_4 \neq 0$		Вырожденные поверхности, $I_4 = 0$
		$I_4 > 0$	$I_4 < 0$	
Центральные поверхности, $I_3 \neq 0$	$I_1 I_3 > 0$ и $I_2 > 0$	Мнимый эллипсоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 + 1 = 0$	Действительный эллипсоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 - 1 = 0$	Точка вырожденного эллипсоида $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 0$
	$I_1 I_3 \leq 0$ или $I_2 \leq 0$	Однополостный гиперболюид $(x/a)^2 - (y/b)^2 + (z/c)^2 - 1 = 0$	Двуполостный гиперболюид $(x/a)^2 - (y/b)^2 + (z/c)^2 + 1 = 0$	Конус вырожденного гиперболюида $(x/a)^2 - (y/b)^2 + (z/c)^2 = 0$
Нецентральные поверхности, $I_3 = 0$		Гиперболический параболоид $(x/a)^2 - (y/b) - (z/c)^2 = 0$	Эллиптический параболоид $(x/a)^2 - (y/b) + (z/c)^2 = 0$	Цилиндры и пары плоскостей (табл. 1.4)

Таблица 1.4

$I_3'$	$I_2$	$I_2 > 0$		$I_2 < 0$		$I_2 = 0$
		Эллиптический $(x/a)^2 + (z/c)^2 - 1 = 0$	Гиперболический $(x/a)^2 - (z/c)^2 - 1 = 0$	Гиперболический $(x/a)^2 - (z/c)^2 - 1 = 0$	Параболический $(x/a)^2 + (z/c)^2 = 0$	
Пары плоскостей, $I_3' = 0$	$\text{rang}(F) = 2$	Прямая пересечения плоскостей $(x/a)^2 + (z/c)^2 = 0$	Пересекающиеся $(x/a)^2 - (z/c)^2 = 0$	Параболический $(x/a)^2 + (z/c)^2 = 0$	Параболический $(x/a)^2 + (z/c)^2 = 0$	
	$\text{rang}(F) = 1$			Совпадающих $(x/a)^2 = 0$	Совпадающих $(x/a)^2 = 0$	

**Неявная форма неудобна для построения поверхностей** и используется при анализе их свойств по инвариантам и решении задач пересечения методом трассировки лучей.

Исследуем *взаимное расположение квадратичной поверхности*  $\{F\}$  *с прямой линией*  $\{q, V\}$  *и с плоскостью*  $\{q, V, W\}$ .

- Первая задача фактически решена в (1.54)–(1.56). Анализируя варианты решения квадратного уравнения  $at^2 + 2bt + c = 0$  из (1.55) с коэффициентами

$$a = VF_{11}V^T, \quad b = (qF_{11} + F_{21})V^T, \quad c = qF_{11}q^T + 2qF_{21}^T + D$$

и дискриминантом  $d = b^2 - ac$ , заключаем:

- при  $\{a \neq 0\} \cap \{d > 0\}$  прямая *пересекает* поверхность в *двух различных точках*  $p_1 = q + Vt_1$  и  $p_2 = q + Vt_2$  с параметрами

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{a} < t_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{a};$$

- при  $\{a \neq 0\} \cap \{d = 0\}$  прямая *касается* поверхности в *единственной точке*  $p_1 = q + Vt_1$  с параметром

$$t_1 = \frac{-b}{a};$$

- при  $\{a = 0\} \cap \{b \neq 0\}$  прямая *пересекает* поверхность в *единственной точке*  $p_1 = q + Vt_1$  с параметром

$$t_1 = \frac{-c}{2b};$$

- при  $\{a = 0\} \cap \{b = 0\} \cap \{c = 0\}$  прямая *касается* нецентральной поверхности в *бесконечном множестве точек*;
- в остальных случаях прямая не имеет с поверхностью ни одной общей точки.
- Подставим параметрическое уравнение плоскости  $p(t, \tau) = q + Vt + W\tau$  в неявное векторное уравнение квадратичной поверхности с матрицей  $F$  из (1.124):

$$(q + Vt + W\tau)F_{11}(q + Vt + W\tau)^T + 2(q + Vt + W\tau)F_{21}^T + D = 0. \quad (1.127)$$

После упрощения получим квадратичное уравнение связи параметров  $t$  и  $\tau$  в скалярном или матричном видах

$$at^2 + b\tau^2 + 2et\tau + 2gt + 2j\tau + d = 0 \quad \text{и} \quad \theta(t, \tau) = [t \quad \tau] \Theta \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix} = 0 \quad (1.128, a)$$

со следующей симметричной матрицей  $\Theta$  и коэффициентами  $a, b, d, e, g$  и  $j$ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} a & e & g \\ e & b & j \\ g & j & d \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} a &= VF_{11}V^T, & b &= WF_{11}W^T, & d &= qF_{11}q^T + 2qF_{21}^T + D, \\ e &= VF_{11}W^T, & g &= (qF_{11} + F_{21})V^T, & j &= (qF_{11} + F_{21})W^T \end{aligned} \quad (1.128, б)$$

Налицо полная аналогия (1.128) с уравнениями (1.51) квадратичных кривых на плоскости. Вычислив по (1.126) инварианты  $I_1 + I_3$  и полуинвариант  $\Gamma_2$  матрицы  $\Theta$ , по табл. 12 определим тип кривой пересечения квадратичной поверхности с плоскостью:

- *действительный эллипс, гипербола и парабола* образуются в большинстве случаев сечения плоскостью криволинейной квадратичной поверхности (эллипсоида, параболоидов, гиперболоидов, цилиндров и конуса);
- *мнимый эллипс и мнимая прямая* означают *отсутствие пересечений* и *касаний* поверхности и плоскости;
- *точка вырожденного эллипса* означает касание поверхности плоскостью в точке;
- *две асимптоты вырожденной гиперболы* образуются при сечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину;
- *две параллельные прямые* образуются при сечении цилиндра плоскостью, параллельной его оси;
- *одна двойная прямая* образуется при касании плоскостью нецентральной поверхности.

В тех случаях, когда неявное уравнение в (1.128, а) может быть приведено к явному виду  $t = \varphi(\tau)$  или  $\tau = \psi(t)$ , возможно получение явных ПФ

$$p(\tau) = p_0 + V\varphi(\tau) + W\tau \quad \text{или} \quad p(t) = p_0 + Vt + W\psi(t)$$

пространственных кривых пересечения плоскости с квадратичной поверхностью. Иначе необходимо найти параметрические зависимости  $t = \varphi(\sigma)$  и  $\tau = \psi(\sigma)$ . Тогда кривая сечения будет описываться ПФ

$$p(\tau) = p_0 + V\varphi(\sigma) + W\psi(\sigma).$$

*Параметрическая форма*  $p(t, \tau)$  поверхности второго порядка может быть получена следующими способами.

- Заменой аргументов  $x, y, z$  канонического уравнения функциями двух параметров (допустим,  $t$  и  $\tau$ ) на основе известных тригонометрических тождеств

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \quad \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1.$$

Простейший пример — *сфера* единичного радиуса. Ее каноническое уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  допускает, например, подстановки

$$x(t, \tau) = \sin(t), \quad y(t, \tau) = \cos(t)\sin(\tau), \quad z(t, \tau) = \cos(t)\cos(\tau).$$

Гораздо более сложен поиск подстановок для произвольного уравнения второго порядка. Данная задача решается методом геометрических преобразований канонической поверхности в заданную, с которым можно ознакомиться, например, в [10, 26, 32].

- Суперпозицией одновременных движений точки вдоль координатных осей из определенного начального положения. Например, сложение гармонических колебаний  $x(t, \tau) = \sin(t)$  и  $z(t, \tau) = \cos(\tau)$  вдоль осей  $x$  и  $z$  с независимым от них равномерным движением  $y(t, \tau) = \tau$  вдоль оси  $y$  дают боковую поверхность *кругового цилиндра*. Если движение вдоль оси  $y$  сделать зависимым, например,  $y(t, \tau) = ht$ , то получим *цилиндрическую винтовую линию* с шагом  $2\pi h$ . Детальное изучение кинематического метода построения параметрических кривых и поверхностей продолжим в следующих главах.

Обязательными элементами параметрической формы являются интервалы изменения параметров  $t$  и  $\tau$ , *необходимые* и *достаточные* для описания точек всей поверхности или любого ее желаемого фрагмента.

Реалистичное изображение гладкой поверхности на экране дисплея — сложная задача, состоящая в передаче ее формы за счет правильного расчета освещенности видимых точек. Упрощенное построение поверхности заключается в изображении ее *каркаса* — совокупности линий, передающих форму поверхности. Для этого выполняется *дискретизация* непрерывных параметров

$$t = t_0, t_1, \dots, t_n, \tau = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$$

и организуются вложенные циклы вывода на экран каркасных линий  $p(t, \tau)$  и  $p(t, \tau)$ . Пересечение линий дает *ячейки* треугольной или четырехугольной формы. Наиболее простое изображение непрозрачной поверхности заключается в закрасивании всех точек видимой ячейки постоянным цветом, соответствующим освещенности усредненной точки ячейки, например, ее центра. Существуют и более сложные методы закраски поверхностей, некоторые из которых будут рассмотрены в гл. 3.

*Основные трудности некинематического подхода* к составлению уравнений квадратичных поверхностей:

- невозможность описания единственным векторным уравнением гиперболических и двуполостных поверхностей из-за постоянства знака функций  $\text{sh}(\cdot) > 0$  и  $t^2 \geq 0$ ;
- назначение интервалов изменения параметров, обеспечивающих существование и единственность поверхности в желаемой области пространства;
- выбор из множества вариантов функций подстановки, обеспечивающих вычисление нормали  $N(t, \tau) = p'_t \times p'_\tau$  к поверхности во *всех* ее регулярных точках;
- неизвестный заранее вид каркасной сетки  $\{p(t, \tau), p(t, \tau)\}$ , выясняемый только после практического построения поверхности.

На рис. 1.50 с помощью программы MathCAD построены некоторые квадратичные поверхности из табл. 1.3, 1.4 по их каноническим уравнениям с численными значениями масштабных коэффициентов  $a = 1$ ,  $b = 2$  и  $c = 3$ :

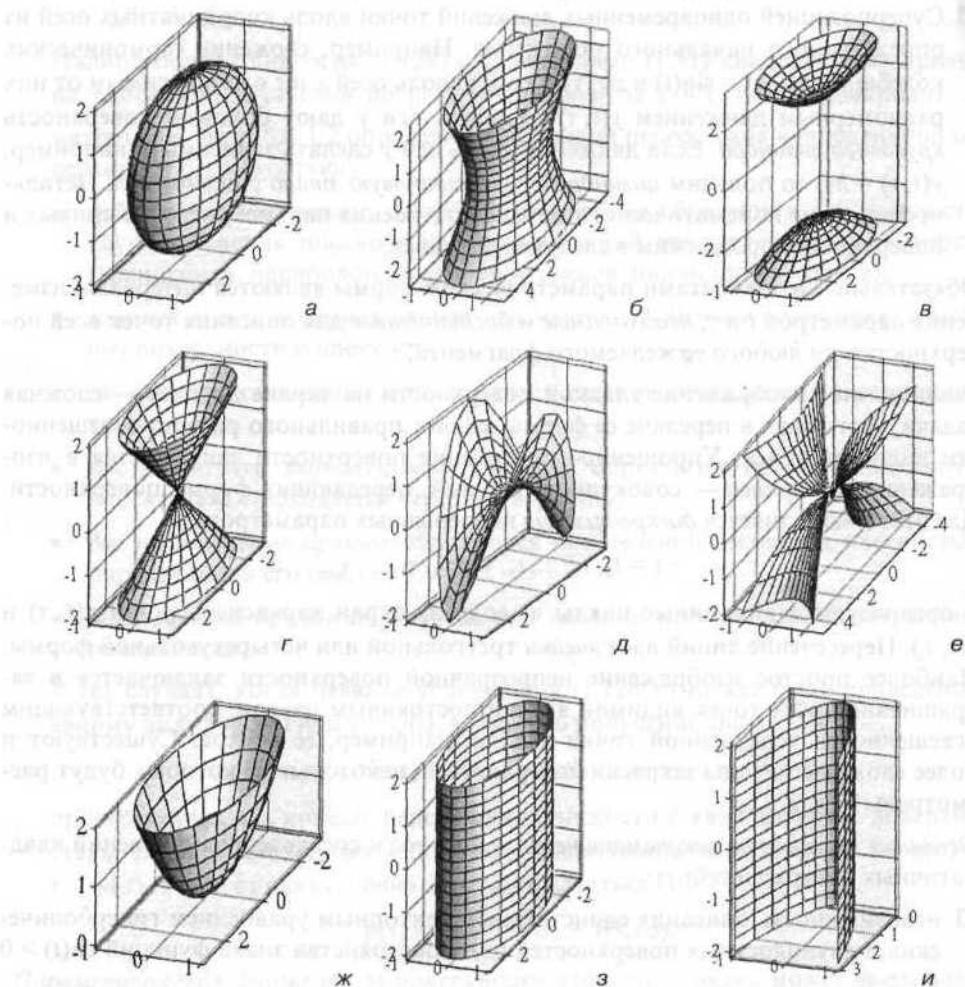


Рис. 1.50

- действительный эллипсоид (рис. 1.50, а):

$$\begin{cases} p(t, \tau) = [a \sin(t) \sin(\tau) & b \cos(t) & c \sin(t) \cos(\tau)] \\ t \in [0, \pi], \tau \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (1.129, a)$$



Как пример неудачной подстановки приведем другую модель эллипсоида

$$\begin{cases} p(t, \tau) = \left[ a\sqrt{1-t^2} \cos(\tau) & bt & c\sqrt{1-t^2} \sin(\tau) \right] \\ t \in [-1, 1], \tau \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (1.129, \delta)$$

у которой частная производная

$$p'_i(t, \tau) = \left[ \frac{-at \cos(\tau)}{\sqrt{1-t^2}} \quad b \quad \frac{-ct \sin(\tau)}{\sqrt{1-t^2}} \right]$$

не вычислима в точках  $[0 \pm b \ 0]$  при  $t = \pm 1$ , хотя нормаль

$$N(t, \tau) = - \left[ bc\sqrt{1-t^2} \cos(\tau) \quad act \quad ab\sqrt{1-t^2} \sin(\tau) \right]$$

существует во всех точках поверхности эллипсоида, а при  $t = \pm 1$  вычисляется вручную разрешением неопределенности типа  $0/0$ ;

- *однополостный гиперболоид* (рис. 1.50, б):

$$\begin{cases} p(t, \tau) = \left[ a \operatorname{ch}(t) \sin(\tau) & b \operatorname{sh}(t) & c \operatorname{ch}(t) \cos(\tau) \right] \\ t \in (-\infty, \infty), \tau \in [0, 2\pi]; \end{cases} \quad (1.130)$$

- *двуполостный гиперболоид* (рис. 1.50, в) с матрицей

$$F = \operatorname{diag} \left[ \frac{1}{a^2} \quad \frac{-1}{b^2} \quad \frac{1}{c^2} \quad 1 \right]$$

описывается двумя параметрическими функциями верхней (+) и нижней (-) полостей:

$$\begin{cases} p(t, \tau) = \left[ a \operatorname{sh}(t) \sin(\tau) \pm b \operatorname{ch}(t) & c \operatorname{sh}(t) \cos(\tau) \right] \\ t \in [0, \infty), \tau \in [0, 2\pi]; \end{cases} \quad (1.131)$$

- *эллиптический конус* (рис. 1.50, г):

$$\begin{cases} p(t, \tau) = \left[ at \sin(\tau) & bt & ct \cos(\tau) \right] \\ t \in (-\infty, \infty), \tau \in [0, 2\pi]; \end{cases} \quad (1.132)$$

- седловая поверхность *гиперболического параболоида* (рис. 1.50, д) наиболее удачно описывается в параметрической форме как

$$\begin{cases} p(t, \tau) = \left[ at \sin(\tau) & -bt^2 \cos(2\tau) & ct \cos(\tau) \right] \\ t \in [0, \infty), \tau \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (1.133, a)$$

В учебниках и справочниках [13,26] ошибочно приводятся параметрические модели гиперболического параболоида типа

$$\begin{cases} p(t, \tau) = [at \operatorname{ch}(\tau) & bt^2 & ct \operatorname{sh}(\tau)] \\ t \in (-\infty, \infty), \tau \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

описывающие его поверхность только в половине пространства. Правильнее было бы составить отдельные выражения для верхних и нижних полостей (рис. 1.50, e):

$$p(t, \tau) = \begin{cases} [at \operatorname{ch}(\tau) & bt^2 & ct \operatorname{sh}(\tau)] & \text{— верхние правая и левая,} \\ [at \operatorname{sh}(\tau) & -bt^2 & ct \operatorname{ch}(\tau)] & \text{— нижние передняя и задняя.} \end{cases} \quad (1.133, б)$$

Эти полости соединяются друг с другом на вычислительно недоступных ( $t \rightarrow \pm\infty$ ) асимптотических прямых  $x/a = z/c$ , что не позволяет изобразить всю поверхность как единое целое. Следовательно, модель гиперболического параболоида (1.133, б) во всем проигрывает модели (1.133, а) и является неверной;

- *эллиптический параболоид* (рис. 1.50, ж):

$$\begin{cases} p(t, \tau) = [at \sin(\tau) & bt^2 & ct \cos(\tau)] \\ t \in [0, \infty), \tau \in [0, 2\pi]; \end{cases} \quad (1.134)$$

- *эллиптический цилиндр*

$$\begin{cases} p(t, \tau) = [a \sin(\tau) & bt & c \cos(\tau)] \\ t \in (-\infty, \infty), \tau \in [0, 2\pi]; \end{cases} \quad (1.135)$$

$$p(t, \tau) = [a\tau & bt & c\tau^2] \quad (1.136)$$

*II параболический цилиндр*

$$p(t, \tau) = [a\tau & bt & c\tau^2] \quad (1.136)$$

**Пример 1.5.** Классифицировать поверхность, описываемую неявным уравнением

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 + xz - 2y + z - 1 = 0,$$

и линию пересечения этой поверхности с плоскостью, заданной отрезками  $h_x = 3$ ,  $h_y = 2$  и  $h_z = 1$ , отсекаемыми ею на осях координат.

*Решение.* Составим по (1.124) матрицу поверхности и вычислим ее инварианты:

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} I_1 &= 0, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -29, \\ I_3 &= 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -50, \quad I_4 = |F| = 192. \end{aligned}$$

По классификации, приведенной в табл. 1.3, это соответствует поверхности *однополостного гиперboloида*, плоскими сечениями которого могут быть эллипс, парабола или гипербола.

Сформируем по (1.74, б) параметры описания плоскости

$$p_0 = [3 \ 0 \ 0], \quad V = [-3 \ 2 \ 0], \quad W = [-3 \ 0 \ 1]$$

и вычислим коэффициенты квадратного уравнения (1.128) (34).

$$a = 44, \quad b = 24, \quad e = 33, \quad g = 40, \quad j = 32, \quad d = 34.$$

$$I_1 = 68 > 0, \quad I_2 = -33 < 0, \quad I_3 = -98 < 0$$

По его инвариантам

$$I_1 = 68 > 0, \quad I_2 = -33 < 0, \quad I_3 = -98 < 0$$

с помощью табл. 1.2 определяем, что линия пересечения является *гиперболой*, описываемой неявным уравнением

$$22t^2 + 12\tau^2 + 33t\tau - 40t - 32\tau + 17 = 0.$$

Задав величину  $h_x = 4$ , мы получим в сечении гиперболоида плоскостью *параболу* с уравнением

$$36t^2 + 25\tau^2 + 60t\tau - 68t - 59\tau + 31 = 0$$

и инвариантами

$$36t^2 + 25\tau^2 + 60t\tau - 68t - 59\tau + 31 = 0$$

$$I_1 = 122 > 0, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -392 < 0.$$

При  $h_x = 5$  сечение дает *эллипс*

$$54t^2 + 42\tau^2 + 95t\tau - 104t - 94\tau + 49 = 0$$

с инвариантами

$$I_1 = 192 > 0, \quad I_2 = 47 > 0, \quad I_3 = -768 < 0. \quad \square$$

**Пример 1.6.** Построить тень каркаса пирамиды с вершинами

$$p_1 = [3 \ 4 \ -1], \quad p_2 = [2 \ 4 \ 2], \quad p_3 = [5 \ 3 \ 2], \quad p_4 = [2 \ 2 \ 0]$$

на поверхности эллипсоида с полуосями  $r_x = 2$ ,  $r_y = 1$ ,  $r_z = 3$  и центром в точке  $c = [-2 \ 1 \ -2]$ . Источник света удален в бесконечность в направлении  $L = [4 \ 2 \ 1]$  (рис. 1.51).

*Решение.* По каноническому уравнению эллипсоида из табл. 13 и заданным параметрам получим неявное уравнение

$$\left(\frac{x-c_x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y-c_y}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z-c_z}{r_z}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 + 9x - 18y + 4z + 52 = 0,$$

а по (1.124) следующую матрицу  $F$  и ее блоки:

$$F = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 36 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 18 & -36 & 8 & 52 \end{bmatrix}, \quad F_{11} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad F_{12} = \begin{bmatrix} 18 \\ -36 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad F_{21} = [18 \ -36 \ 8], \quad D = 52.$$

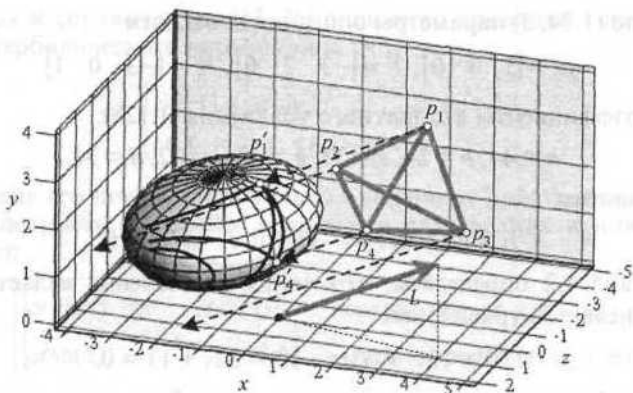


Рис. 1.51

Так как в квадратном уравнении (1.55) коэффициент

$$a(p) = LF_{11}L^T = 292 \neq 0$$

не зависит от расположения точки  $p$ , то пересечение луча  $p - Lt$  с квадратичной поверхностью определяется знаком дискриминанта  $d(p) - b^2(p) - a(p) \cdot c(p)$  с коэффициентами

$$b(p) = -(pF_{11} + F_{21})L^T = -8 - 34x - 72y - 4z,$$

$$c(p) = pF_{11}p^T + 2pF_{21}^T + D = 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 + 36x - 72y + 16z + 52.$$

Вычислим дискриминанты и действительные точки тени для четырех вершин пирамиды

$$p'_i = p_i + \frac{b(p_i) + \sqrt{d(p_i)}}{a(p_i)} L \quad \forall i = \overline{1,4};$$

$$b(p_1) = -400, c(p_1) = 517, d(p_1) = 9036 > 0 \Rightarrow p'_1 = [-1.177 \quad 1.911 \quad -2.044];$$

$$b(p_2) = -376, c(p_2) = 496, d(p_2) = -3456 < 0;$$

$$b(p_3) = -412, c(p_3) = 613, d(p_3) = -9256 < 0;$$

$$b(p_4) = -224, c(p_4) = 160, d(p_4) = 3456 > 0 \Rightarrow p'_4 = [-0.263 \quad 0.868 \quad -0.566].$$

Отрицательные значения  $d(p_2)$  и  $d(p_3)$  означают, что лучи, проходящие через вершины  $p_2$  и  $p_3$ , не пересекаются с поверхностью эллипсоида. Следовательно, ребра пирамиды  $p_1 p_2$ ,  $p_1 p_3$ ,  $p_2 p_3$ ,  $p_2 p_4$  и  $p_3 p_4$ , инцидентные этим вершинам, не могут полностью проецироваться на поверхность.  $\square$

В общем случае тень прямолинейного отрезка  $p_1 p_2$  на криволинейной поверхности может быть одной линией, разрываться на несколько линий или вообще отсутствовать. Концы отрезка могут не иметь тени, а внутренние его точки могут,

например, ребро  $p_2p_3$ . Предлагается следующий численный метод расчета криволинейной тени каркасного объекта, ребра которого в общем случае — криволинейные отрезки. Метод гарантирует достоверное построение тени каркасного объекта на произвольной квадратичной поверхности, а при достаточно частой дискретизации ребер — гладкость изображений криволинейных теней.

Шаг 1. Ребра каркаса разбиваются на достаточно малые прямые отрезки.

Шаг 2. Для каждого отрезка  $p_i p_j$  вычисляются дискриминанты его концов  $d_i$  и  $d_j$ .

Шаг 3. Если  $\{d_i \geq 0\} \cap \{d_j \geq 0\}$ , то по (1.56, а) рассчитываются ближайшие к источнику света точки

$$p'_i = p_i + \frac{b_i + \sqrt{d_i}}{a_i} L, \quad p'_j = p_j + \frac{b_j + \sqrt{d_j}}{a_j} L$$

пересечения лучей  $p_i - Lt$  и  $p_j - Lt$  с квадратичной поверхностью. В противном случае тень отрезка отсутствует.

Шаг 4. Рассчитывается изображение отрезка прямой  $p'_i p'_j$  на экране дисплея. □

### 1.3. Основные задачи геометрической оптики

Построение компьютерного изображения трехмерных объектов и сцен основано на методе трассировки лучей, моделирующем процесс распространения световых лучей от момента их испускания источниками до взаимодействия с объектами сцены и попадания в приемник. Основная идея метода сводится к повторению на ЭВМ всех геометрических преобразований, которые бы совершил световой луч на пути источник — объект — приемник (глаз наблюдателя). Хотя действительных лучей бесконечно много, обычно ограничиваются трассировкой выборочных лучей, достаточных для достижения желаемой реалистичности изображения сцены — совокупности объектов и окружающего их интерьера. Например, для изображения полностью видимого отрезка прямой линии достаточно проведения всего двух лучей через его концевые точки. Расчет тени отрезка на криволинейной поверхности требует проведения большого числа лучей через внутренние точки отрезка. Эти точки должны быть выбраны с такой дискретностью, чтобы ломаная линия (изображение тени отрезка) выглядела гладкой дугой.

Ключевая задача метода трассировки лучей — определение освещенности произвольной точки поверхности и части световой энергии, содержащейся в отраженном и преломленном лучах. Освещенность создается первичной энергией источников света и вторичной энергией лучей, отраженных от других объектов сцены. Отсутствие освещенности означает затененность точки. Существование и интенсивность вторичной энергии определяются оптико-механическими свойствами материалов — прозрачностью, цветом, шероховатостью и отражательной способностью поверхности.

Для каждого луча решается задача пересечения с объектами сцены. Распространяясь прямолинейно, луч либо проходит мимо всех объектов и покидает пространство сцены, либо пересекает первый встретившийся на его пути объект. В точке пересечения часть световой энергии поглощается материалом поверхности, а оставшаяся часть энергии первичного падающего луча претерпевает расщепление на *вторичные* лучи — отраженный и преломленный. Соотношение поглощенной, отраженной и преломленной энергий луча определяется большим числом факторов. Это и физико-механические, и оптические свойства материала поверхности, и ее ориентация в пространстве, и спектральный состав луча, и т. д., и т. п.

Каждый из вторичных лучей распространяется до пересечения со следующей поверхностью, порождая третичные лучи, и т. д. Любое взаимодействие с поверхностью уменьшает суммарную энергию отраженных и преломленных лучей. Поглощение энергии происходит также при распространении луча в не абсолютно прозрачной среде. Таким образом, через определенное число столкновений с поверхностями объектов интенсивность луча становится меньше некоторого порогового значения и отслеживание процесса его распространения прекращается.

Абстрагируясь от волновой природы оптического излучения, будем руководствоваться **законами геометрической оптики** [16]: *прямолинейности* распространения луча в однородной среде (принцип **Ферма**), *отражения*, *преломления* и *обратимости* хода светового луча. Наибольшую сложность расчета взаимного положения луча с произвольной поверхностью имеют задачи пересечения, отражения и преломления. Рассмотрим в общих чертах содержание и алгоритмы решения задач геометрической оптики.

### 1.3.1. Пересечение луча с поверхностью

Принцип прямолинейности распространения света в однородной среде позволяет построить **алгоритм расчета пересечения луча с ограниченной поверхностью**, изображенной на рис. 1.52.

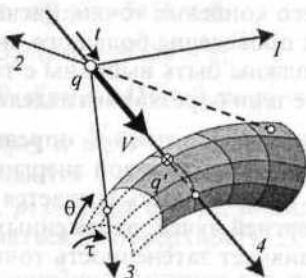


Рис. 1.52