

модели, задав желаемое начальное состояние объекта, необходимые матрицы преобразований и интервалы изменения параметров. Простейший пример: для построения окружности кинематическим методом достаточно задать:

- начальное состояние точки, например, $p(0) = [1 \ 0]$;
- возрастающие значения параметра в интервале $t \in [0, 2\pi]$;
- векторное уравнение $p(t) = p(0)R(t)$, моделирующее вращение точки на единичном расстоянии от начала координат. Параметр t имеет физический смысл угла между векторами $p(0)$ и $p(t)$.

Для повышения эффективности своей работы программистом должна быть создана библиотека матричных и графических функций, процедур и алгоритмов. Такой стиль разработки программ делает их модульными и компактными, лучше читаемыми, удобными в отладке и внесении корректив в структуру и параметры модели.

При решении же задач *анализа* необходимы координатные уравнения состояний объекта, получаемые обычно кропотливыми ручными выкладками либо с помощью возможностей символического процессора MathCAD, либо какой-нибудь другой "умной" математической программы.

Рассмотрим основы кинематического принципа конструирования линий. Кривая изображается на экране последовательностью точек $p(t_i)$, соединенных отрезками прямых. Визуальная близость полученной ломаной линии к гладкой кривой определяется плотностью размещения узловых точек по периметру кривой. *Оптимальная* плотность пропорциональна кривизне кривой, при этом минимальное расстояние между соседними точками должно быть порядка одного пиксела. Для получения такого распределения необходим *анализ* скорости $V(t) = dp(t)/dt$ движения точки по кривой. Например, вектор скорости движения по окружности получается как

$$V(t) = p(0) \frac{dR(t)}{dt},$$

так и ручным выводом, и по координатным дифференцированием уравнения (1.57):

$$c(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} = [\cos(t) \ \sin(t)] \Rightarrow V(t) = [-\sin(t) \ \cos(t)]. \quad (2.37)$$

Анализ модуля векторной функции $|V(t)| = 1$ показывает, что точка движется по окружности с постоянной скоростью, поэтому оптимальным является *равномерное* распределение значений параметра $t_i = i\Delta t \ \forall i=0, n$ по интервалу $[0, 2\pi]$ с постоянным шагом дискретности $t = 2\pi/n$. При таком выборе параметрической модели окружности соседние точки c_i и $c_{i+1} = c_i R(\Delta t)$ равноотстоят друг от друга как по углу $t = \text{const}$, так и по периметру:

$$|c_{i+1} - c_i| = 2\sin(\Delta t / 2) = \text{const}.$$

Соединение точек отрезками прямых аппроксимирует окружность правильным n -угольником (рис. 2.17, а). С учетом масштабного множителя μ_0 из (2.27,6) значения

$$n = 2\pi\mu_0, \Delta t = 1/\mu_0$$

достаточно для того, чтобы расстояние между узловыми точками было равно одному пикселу, а многоугольник точно совпал с окружностью. В действительности уже при $t = 10/\mu_0$ многоугольник визуально не отличается от окружности.

Возможны и некинематические параметрические модели окружности, например, удовлетворяющие каноническому уравнению $x^2 + y^2 - 1 = 0$ функции координат $x(t)$, $y(t)$ и вычисленный их дифференцированием вектор направления движения $V(t)$:

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow V(t) = 2 \left[\frac{-2t}{(1+t^2)^2} \quad \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right], |V(t)| = \frac{2}{1+t^2}. \quad (2.38)$$

Зависимость модуля вектора скорости движения от параметра t означает, что при постоянном шаге t точки $[x(t), y(t)]$ распределены по окружности (кривой постоянной кривизны) неравномерно (рис. 2.17, б). Кроме того, точка $[-1, 0]$, соответствующая значениям параметра $t = \pm 1$, вычислительно недоступна. Следовательно, дробно-рациональная модель (2.38) неудачна, хотя по ней точки окружности рассчитываются быстрее, чем по тригонометрической модели (2.37).

Еще менее удачна некинематическая модель

$$x(t) = t, y(t) = \sqrt{1-t^2} \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Во-первых, по ней строится не вся окружность, а лишь ее верхняя половина.

Нижняя половина имеет ординату $y(t) = -\sqrt{1-t^2}$. Во-вторых, вектор скорости

$$V(t) = \left[1 \quad \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right]$$

в крайних точках $[\pm 1, 0]$ при $t = \pm 1$ невычислим. В-третьих, нелинейная зависимость модуля скорости $|V(t)| = 1/\sqrt{1-t^2}$ от параметра t также дает неравномерное распределение точек $p(t)$ по периметру (рис. 2.17, в).

Проведенный сравнительный анализ трех моделей одного и того же графического объекта показывает, насколько компетентно нужно подходить к выбору как уравнений модели, так и ее параметров для получения достоверного и качественного изображения объекта на экране дисплея.

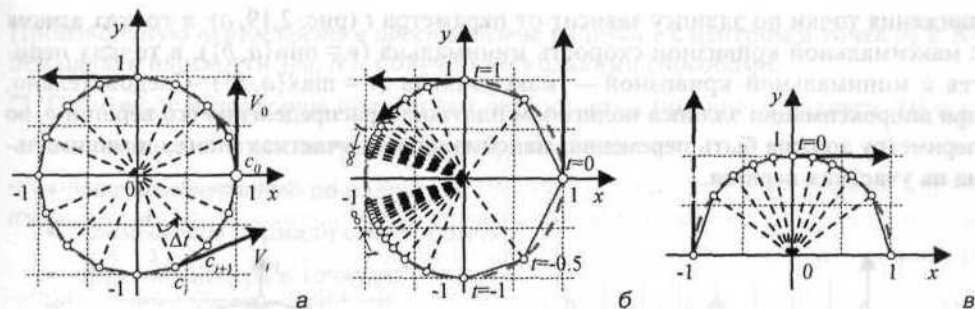


Рис. 2.17

Параметрические уравнения произвольного эллипса на плоскости с центром в точке $p_{ii} = [x_{ii} \ y_{ii}]$ полуосями a, b и углом наклона большой полуоси α получим за три преобразования (масштабирования, вращения и переноса) окружности $c(t)$ (рис. 2.18):

$$p(t) = c(t) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} + p_{ii},$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\alpha) \cos(t) - b \sin(\alpha) \sin(t) + x_{ii}, \\ y(t) = a \sin(\alpha) \cos(t) + b \cos(\alpha) \sin(t) + y_{ii}. \end{cases} \quad (2.39)$$

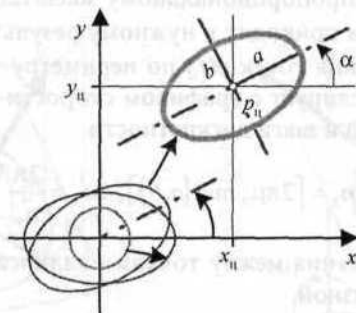


Рис. 2.18

Модуль

$$v(t) = |V(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}$$

вектора ск

$$V(t) = c'(t)M(a, b)R(\alpha) =$$

$$= [-a \cos(\alpha) \sin(t) - b \sin(\alpha) \cos(t) \quad -a \sin(\alpha) \sin(t) + b \cos(\alpha) \cos(t)]$$

движения точки по эллипсу зависит от параметра t (рис. 2.19, а): в точках апогея с максимальной кривизной скорость минимальна ($v = \min\{a, b\}$), в точках перигея с минимальной кривизной — максимальна ($v = \max\{a, b\}$). Следовательно, при аппроксимации эллипса полигоном плотность распределения его вершин p_i по периметру должна быть переменна: максимальна на участках апогея и минимальна на участках перигея.

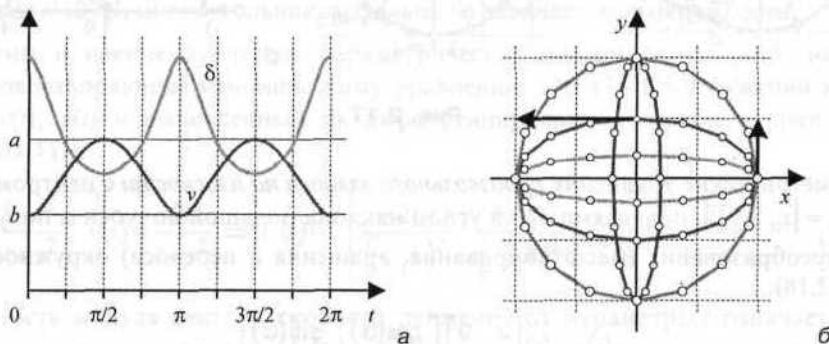


Рис. 2.19

Точное решение задачи распределения связано с исчислением эллиптических интегралов. Простейшее же решение — *равномерное* распределение $t_i = i t$ с шагом $t = 2\pi/n$ — благодаря непропорциональному масштабированию окружности в (2.39) при $a \neq b$ фактически приводит к нужному результату (рис. 2.19, б): график $\delta(t)$ плотности распределения точек $p(t)$ по периметру эллипса, приведенный на рис. 2.19, а, обратно коррелирует с графиком скорости $v(t)$. Оптимальные значения числа сторон полигона и шага дискретности

$$n_3 = \lceil 2\pi\mu_3 \min\{a, b\} \rceil, \quad \Delta t_3 = \frac{2\pi}{n_3}$$

дают минимальные расстояния между точками эллипса в один пиксел на участках с максимальной кривизной.

В частном случае при $a = b = r$ и $a = 0$ эллипс превращается в *окружность* радиуса r с центром в точке $p_{ц} = [x_{ц} \ y_{ц}]$:

$$p(t) = rc(t) + p_{ц} = [r \cos(t) + x_{ц} \quad r \sin(t) + y_{ц}]. \quad (2.40)$$

Наилучшее качество аппроксимации окружности правильным n -угольником достигается при выборе параметров моделирования

$$n_0 = \lceil 2\pi\mu_3 r \rceil, \quad \Delta t_0 = \frac{2\pi}{n_0}.$$

Произвольную окружность в пространстве радиуса r с центром в точке $p_{ц} \in \mathbb{R}^3$, лежащую в плоскости $\{p_{ц}, N\}$, получим несколькими способами.

• По методу разложения подвергнем окружность единичного радиуса $c(t) \in xy$ с нормалью z^0 трем активным преобразованиям:

- масштабированию до радиуса r ;
- совмещению нормали с вектором N ;
- переносу центра в точку $p_{ц}$.

Векторное уравнение окружности

$$\tilde{p}(t) = r[c(t) \ 0] A_p^{-1}(N) + p_{ц} \quad (2.41)$$

использует обратную матрицу преобразования системы координат $A_p(V)$ с аргументом $V = N$, вычисляемую в разд. 2.1.3.1 двумя способами:

- по варианту (2.30), (2.31) поворот $z^0 \rightarrow N$ выполняется вращениями, изображенными на рис. 2.20, а. Обозначив вектор проекции нормали

$$v = [N_x \ 0 \ N_z] \in xz,$$

получим алгоритм

$$\alpha = \text{if}(|v|; \text{angle}(v, y^0), 0), \beta = \arcsin\left(\frac{N_y}{|N|}\right), A_p^{-1}(N) = R_x(-\beta)R_y(\alpha); \quad (2.42, a)$$

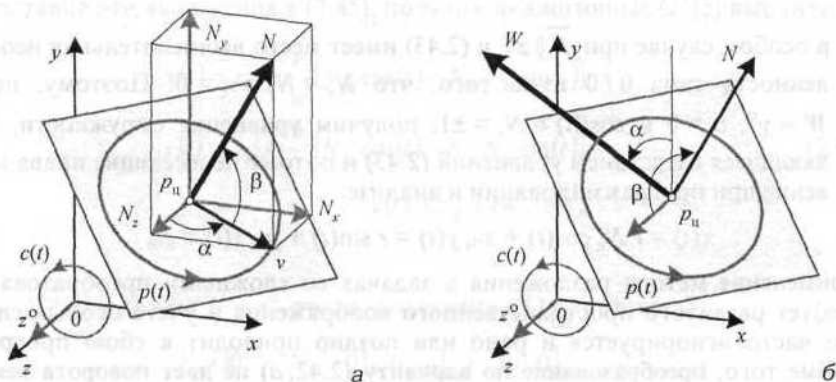


Рис. 2.20

- по экономичному варианту (2.33) два вращения обеспечивают кратчайший поворот $z^0 \rightarrow N$ (рис. 2.20, б). Вычислив вектор

$$W = z^0 \times N \in xy,$$

получим алгоритм

$$\alpha = \text{if}(|W|: \text{angle}(y^0, W), 0), \beta = \arccos(z^0 \circ \bar{N}),$$

$$A_{\text{эп}}^{-1}(N) = R_y(\beta)R_z(\alpha). \quad (2.42, б)$$

Для иллюстрации сказанного составим по (2.42, б) аналитические уравнения произвольной окружности в зависимости от ориентации нормированной нормали $\bar{N} = [N_x \ N_y \ N_z]$:

- при $\bar{N} \# z^0$ для вектора $W = z^0 \times \bar{N} = [-N_y \ N_x \ 0]$ длиной $w = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \neq 0$ и параметров углов

$$\cos(\alpha) = \frac{N_x}{w}, \sin(\alpha) = N_y/w, \cos(\beta) = N_z, \sin(\beta) = w$$

получим координатные функции

$$\begin{cases} x(t) = r(\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(t) - \sin(\alpha)\sin(t)) + x_{\text{ц}} = \\ \quad = x_{\text{ц}} + \frac{r}{w}(N_x N_z \cos(t) - N_y \sin(t)), \\ y(t) = r(\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(t) + \cos(\alpha)\sin(t)) + y_{\text{ц}} = \\ \quad = y_{\text{ц}} + \frac{r}{w}(N_y N_z \cos(t) + N_x \sin(t)), \\ z(t) = -r \sin(\beta)\cos(t) + z_{\text{ц}} = z_{\text{ц}} - r w \cos(t); \end{cases} \quad (2.43)$$

- в особом случае при $\bar{N} \parallel z^0$ в (2.43) имеет место вычислительная неопределенность типа $0/0$ из-за того, что $N_x = N_y = w = 0$. Поэтому, полагая $W = y^0$, $a = 0$ и $\cos(\beta) = N_z = \pm 1$, получим уравнения окружности, не являющиеся следствием уравнений (2.43) и потому не имеющие права на забвение при программировании и анализе:

$$x(t) = r N_z \cos(t) + x_{\text{ц}}, y(t) = r \sin(t) + y_{\text{ц}}, z(t) = z_{\text{ц}}. \quad (2.44)$$

Применение метода разложения в задачах со сложными преобразованиями требует развитого пространственного воображения и учета особых случаев, что часто игнорируется и рано или поздно приводит к сбою программы. Кроме того, преобразование по варианту (2.42, а) не дает поворота векторов $z^0 \rightarrow N$ по кратчайшему углу.

- Получим уравнение окружности *суперпозицией* колебаний точки вдоль двух ортогональных векторов V и W , лежащих в плоскости $\{p_w \ N\}$ (рис. 2.21). В соответствии с (1.71) выберем произвольный вектор $H \# \bar{N}$, вычислим ортогональные нормали векторы

$$V = H \times \bar{N}, \quad W = \bar{N} \times V$$

и составим комбинацию взаимно ортогональных гармонических колебаний вокруг центра P_{Π} :

$$p(t) = p_{\Pi} + r \cos(t)\overline{V} + r \sin(t)\overline{W}. \quad (2.45)$$

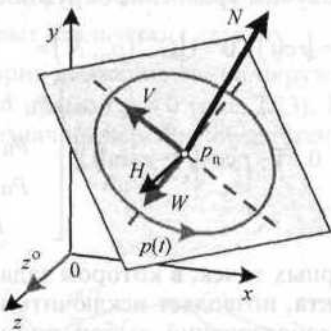


Рис. 2.21

При $\overline{N} \# z^0$ примем $H = z^0$, тогда

$$V = [-N_y \ N_x \ 0], \quad W = [-N_x N_z \ -N_y N_z \ w^2], \quad \text{где } w = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \neq 0.$$

Подставив эти выражения в (2.45), получим аналогичные (2.43) выражения

$$\begin{cases} x(t) = x_{\Pi} - \frac{r}{w} (N_y \cos(t) + N_x N_z \sin(t)), \\ y(t) = y_{\Pi} + \frac{r}{w} (N_x \cos(t) - N_y N_z \sin(t)), \\ z(t) = z_{\Pi} + r w \cos(t). \end{cases} \quad (2.46, a)$$

При $\overline{N} \parallel z^0$ примем $H = x^0$, тогда, подставив в (2.45) векторы

$$V = [0 \ -N_z \ 0], \quad W = [-1 \ 0 \ 0],$$

получим аналогичные (2.44) функции

$$x(t) = x_{\Pi} - r \sin(t), \quad y(t) = y_{\Pi} - r N_z \cos(t), \quad z(t) = z_{\Pi}. \quad (2.46, б)$$

Таким образом, метод суперпозиции в конечном итоге эквивалентен методу разложения, но существенно проще его как для анализа, так и для практического построения окружности в пространстве.

- По методу парных точек, основанному на расширенном варианте (2.34,б), вычислим ортогональный нормали $\bar{N} = [N_x \ N_y \ N_z]$ вектор

$$W = \text{if} \left(\left| z^0 \times \bar{N} \right| : z^0 \times \bar{N}, N_z y^0 \right),$$

с помощью которого получим уравнение окружности

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= [rc(t) \ 0 \ 1] C^{-1}(p_u, \bar{N}) = \\ &= [r \cos(t) \ r \sin(t) \ 0 \ 1 - r \cos(t) - r \sin(t)] \begin{bmatrix} p_u + W \times \bar{N} & 1 \\ p_u + W & 1 \\ p_u + \bar{N} & 1 \\ p_u & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Применение метода парных точек, в котором задаются лишь начальное и конечное состояния объекта, позволяет исключить из процесса разработки алгоритмов сложных преобразований выбор промежуточных ЭП, расчет их матриц, учет особых условий ориентации объекта относительно системы координат и другие тонкие моменты, непонимание которых может привести к нежелательным визуальным эффектам.

Циклические кривые

Циклические кривые образуются сложением относительного движения точки по окружности с переносным движением центра окружности по кривой $p_u(t)$ (рис. 2.22, а):

$$p(t) = r(t)c(\omega t)Q + p_u(t). \quad (2.48)$$

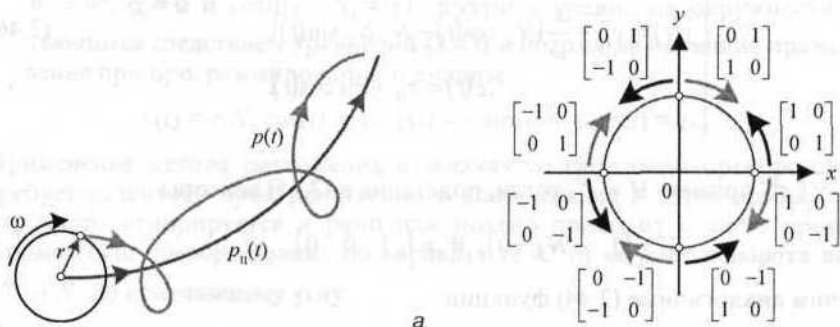


Рис. 2.22

В этом уравнении:

- $r(t)$ — закон изменения радиуса окружности;

- ω — частота относительного вращения, согласованная с переносным движением и равная числу оборотов точки $c(\omega t)$ при изменении t на 2π ;
- Q — матрица управления начальным состоянием и направлением вращения точки по окружности. На рис. 2.22, б приведены значения матриц Q , дающих начальные условия на осях координат и оба направления.

В целом закон движения (2.48) расширяет возможности формулы (1.58).

Получим уравнения некоторых циклических кривых.

- **Циклоида** — это траектория движения точки окружности радиуса r при ее качении без скольжения по прямой $y = 0$ (рис. 2.23). Пусть в (2.48) $\omega = 1$, тогда отсутствие скольжения означает переносное движение

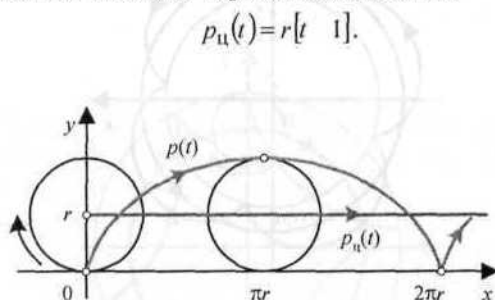


Рис. 2.23

При изменении параметра t на 2π центр окружности смещается по оси x на расстояние $2\pi r$ — длину ее периметра. Выберем матрицу

$$Q = M(1, -1)R(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

такую, что вращение точки $c(t)Q = [-\sin(t) \quad -\cos(t)]$ происходит из начального положения $[0 \quad -1]$ по часовой стрелке. Объединяя найденные элементы движения, получим векторную и координатные уравнения циклоиды

$$p(t) = r[t \quad 1] - r[\sin(t) \quad \cos(t)],$$

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)), \\ y(t) = r(1 - \cos(t)). \end{cases}$$

Трехмерный аналог этой кривой — *циклоидная поверхность*, по которой движется точка сферы, катящейся по плоскости. Подобная поверхность изображена на рис. 1.55, а. Ее параметрическую модель можно получить, вращая циклоиду вокруг оси y :

$$\begin{aligned} p(t, \tau) &= r[t - \sin(t) \quad 1 - \cos(t) \quad 0]R_y(\tau) = \\ &= r[(t - \sin(t))\cos(\tau) \quad 1 - \cos(t) \quad (\sin(t) - t)\sin(\tau)]. \end{aligned}$$

Кинематическому методу формирования разнообразных параметрических поверхностей посвящен основной материал, изложенный в гл. 3.

- *Эпициклоида* представляет собой траекторию движения точки окружности радиуса r при ее качении без скольжения снаружи окружности радиуса r_0 (рис. 2.24). Переносное движение описывается формулой

$$p_u(t) = (r_0 + r) [\sin(t) \quad \cos(t)].$$

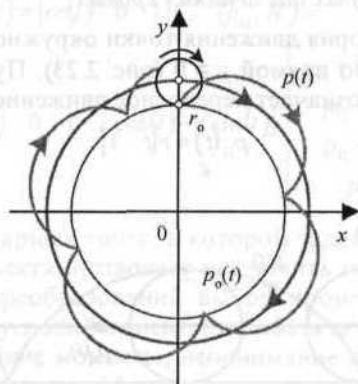


Рис. 2.24

При изменении параметра t на 2π центр внешней окружности совершает $\omega = r_0/r + 1$ оборотов вокруг внутренней. Матрица Q такая же, как у циклоиды. Подставляя найденные элементы движения в (2.48), получим параметрические уравнения эпициклоиды

$$p(t) = (r_0 + r) [\sin(t) \quad \cos(t)] - r [\sin(\omega t) \quad \cos(\omega t)],$$

$$\begin{cases} x(t) = (r_0 + r) \sin(t) - r \sin\left(\left(\frac{r_0}{r} + 1\right)t\right), \\ y(t) = (r_0 + r) \cos(t) - r \cos\left(\left(\frac{r_0}{r} + 1\right)t\right). \end{cases}$$

- *Гипоциклоида* — траектория движения точки окружности радиуса r при ее качении без скольжения внутри окружности радиуса r_0 (рис. 2.25). Переносное движение описывается формулой

$$p_u(t) = (r_0 - r) [\sin(t) \quad \cos(t)].$$

При изменении параметра t на 2π центр внутренней окружности совершает $\omega = r_0/r - 1$ оборотов по периметру внешней. Матрица

$$Q = R(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

дает вращение точки $c(t)Q = [-\sin(t) \ \cos(t)]$ против часовой стрелки из начального положения $[0 \ 1]$. Подставляя найденные элементы движения в (2.48), получим уравнения гипоциклоиды

$$p(t) = (r_0 - r)[\sin(t) \ \cos(t)] + r[-\sin(\omega t) \ \cos(\omega t)],$$

$$\begin{cases} x(t) = (r_0 - r)\sin(t) - r \sin\left(\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)t\right), \\ y(t) = (r_0 - r)\cos(t) + r \cos\left(\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)t\right). \end{cases}$$

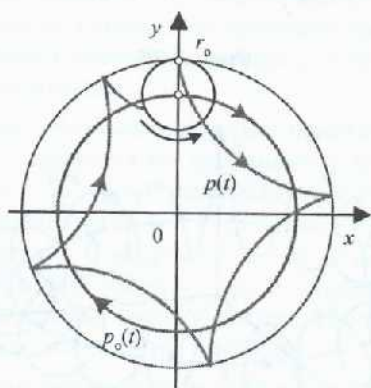


Рис. 2.25

- Коническая винтовая линия с углом раствора 2α и шагом h (рис. 2.26) образуется сложением равномерного переносного движения по оси y и спирального относительного движения в плоскости xz , подобного движению, изображенному на рис. 1.31, а:

$$p(t) = \frac{h \cos(\alpha)}{2\pi} [0 \ t \ 0] + \frac{h \sin(\alpha)t}{2\pi} [c(t) \ 0] R_x(-90^\circ) =$$

$$= \frac{ht}{2\pi} [\sin(\alpha)\cos(t) \ \cos(\alpha) \ -\sin(\alpha)\sin(t)].$$

- Замкнутая спиральная линия, N витков которой равномерно навиты на поверхность тора с осевым радиусом r_0 и радиусом витков r (рис. 2.27), образуется сложением вращения точки по окружности

$$p_0(t) = r[c(t) \ 0] + [r_0 \ 0 \ 0]$$

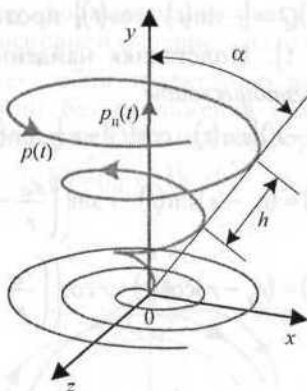


Рис. 2.26

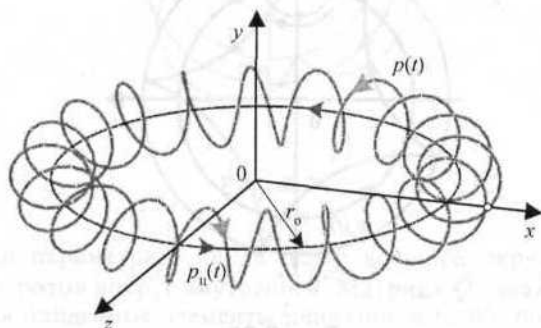


Рис. 2.27

и вращения этой окружности с N раз меньшей частотой вокруг оси y :

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_0(t) R_y \left(\frac{t}{N} \right) = \\
 &= \left[r_0 + r \cos(t) \cos \left(\frac{t}{N} \right) \quad r \sin(t) \quad - (r_0 + r \cos(t) \sin \left(\frac{t}{N} \right)) \right] \quad \forall t = \overline{0, 2\pi N}.
 \end{aligned}$$

2.1.3.3. Кинематическая задача перемещения в пространстве

Продолжая изучение методов сложных преобразований, рассмотрим *кинематическую задачу перемещения в пространстве*. В компьютерной графике непрерывное движение объекта изображается последовательностью *состояний* (фаз, кадров) — элементов дискретного множества его положений во времени и про-

странстве. Цель кинематического анализа и синтеза — изучение и имитация реалистичного движения графических объектов, выявление в алгоритмах движения методических ошибок и неподвижных эффектов.

Движущийся в R^n объект как система *связанных* точек имеет $2n$ степеней свободы: n координат центра масс и n параметров угловой ориентации. Естественно, что наличие формул движения всех основных точек объекта (например, вершин полиэдра) полностью решает задачу кинематики, т. е. позволяет построить изображение объекта в любой момент времени. Однако такая полная информация об объекте, во-первых, не всегда имеется в наличии, а во-вторых, она избыточна. Согласно методу парных точек для идентификации состояния объекта достаточно знания координат его $(n + 1)$ -ой точки, чтобы рассчитать матрицу преобразования из предыдущего состояния и групповым методом получить координаты остальных точек. Этот метод основан на *принципе пространственно-временной когерентности* — сохранении взаимной ориентации точек объекта при его движении в пространстве и во времени.

При неполной информации об объекте логично полагать, что согласно *принципу минимального действия* он движется по *экономичной* траектории — *кратчайший* направлениям переноса центра масс и поворота собственной оси. Без учета вращения объекта вокруг своей оси и его состояние $P = \{o, V\}$ задается центром (*базовой точкой*) o и вектором V направления оси u . Возможно, что объект также подвергается *преобразованию подобия* — равномерному масштабированию во всех направлениях относительно своего центра. Изменение размеров объекта можно моделировать изменением длины вектора V .

В машинной графике применяются два метода кинематического расчета перехода $P_i \rightarrow P_{i+1}$ объекта из предыдущего состояния в последующее.

- *Рекуррентное* вычисление состояний

$$\tilde{P}_{i+1} = \tilde{P}_i C_i \quad \forall i = 1, 2, \dots,$$

начиная с состояния P_1 (рис. 2.28, а). Начальное состояние либо исходно задается элементами $\{o_1, V_1\}$, либо рассчитывается по формуле

$$\tilde{P}_1 = \tilde{P}_0 C_0$$

из состояния P_0 подобного объекту *примитива* — объекта единичных размеров, центр которого o_0 расположен в начале СК, а вектор V_0 ориентирован вдоль некоторой координатной оси. Ниже будет показано, что матрица сложного преобразования C_i может описывать как прямой переход $P_i \rightarrow P_{i+1}$, так и переходы $P_i \rightarrow O_n \rightarrow P_{i+1}$ через начало координат.

Достоинство рекуррентного метода в возможности реализации экономичного движения при специальном выборе матриц C_i . *Недостатком* метода является относительная сложность расчета таких матриц. Метод рекомендуется использовать в экономичном варианте при неполной информации о движении объекта.

- Итеративное вычисление состояний объекта

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_0 C_i \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

из состояния примитива P_0 (рис. 2.28, б). В рамках данного подхода все геометрические объекты сцены исходно задаются примитивами, которые часто являются *виртуальными*, т. е. реально не существующими в сцене объектами. Примитивы удобны для выполнения преобразований относительно осей координат — масштабирования и вращений, после чего следует перенос центра объекта в нужную точку пространства o_i . В следующее состояние P_{i+1} объект опять переносится из начала координат, будучи предварительно подготовлен для этого необходимыми преобразованиями масштабирования и вращения.

Положительными аспектами итеративного метода являются:

- экономия на переносах $P_i \rightarrow O_n$ объекта в начало координат, которые требуются в одном из вариантов рекуррентного метода;
- возможность использовать меньшее число примитивов, чем объектов сцены.

Недостаток метода заключается в том, что два перехода $P_0 \rightarrow P_i$ и $P_0 \rightarrow P_{i+1}$ могут быть не эквивалентны одному экономичному переходу $P_i \rightarrow P_{i+1}$. Визуально это проявляется в виде эффекта нежелательного вращения движущегося объекта вокруг своей оси. Метод рекомендуется использовать при полностью определенных законах движения объекта.

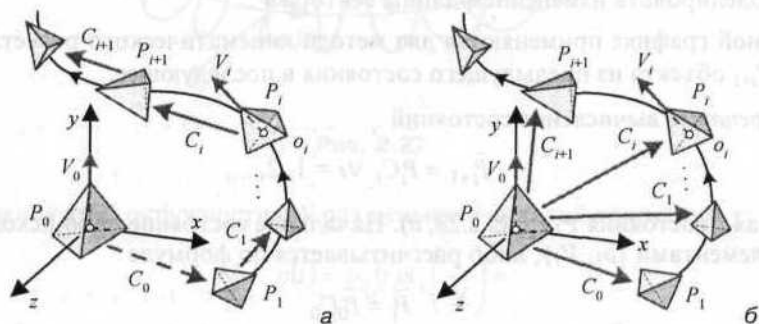


Рис. 2.28

Переходим к разработке *кинематических алгоритмов* — методов вычисления матриц преобразования состояний объекта с не полностью определенными элементами движения. Итак, пусть даны два состояния объекта $\{o_1, V_1\}$ и $\{o_2, V_2\}$ с центрами в точках o_1, o_2 и векторами направления осей V_1, V_2 . Относительное изменение размеров объекта охарактеризуем коэффициентом подобия

$$\mu = \frac{|V_2|}{|V_1|}.$$

Попытаемся получить матрицу экономичного преобразования $\{o_1, V_1\} \rightarrow \{o_2, V_2\}$ по кратчайшим направлениям переноса $o_1 \rightarrow o_2$ и вращения $V_1 \rightarrow V_2$. Кратчайшее изменение направления от V_1 до V_2 означает одновременный поворот всех точек объекта, перенесенного из o_1 в o_2 , на один и тот же минимальный угол ψ до совмещения V_1 с V_2 (рис. 2.29).

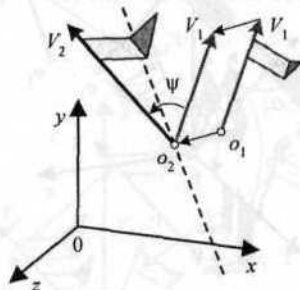


Рис. 2.29

• По методу разложения, основанному на преобразовании (2.30), выполним переход из $\{o_1, V_1\}$ в $\{o_2, V_2\}$ за пять фаз с соответствующими матрицами:

- Ф1: $\{o_1, V_1\} \rightarrow \{O_3, V_1\}$ — перенос из o_1 в начало координат матрицей $T(-o_1)$;
- Ф2: $\{O_3, V_1\} \rightarrow \{O_3, |V_1|z^0\}$ — совмещение вектора V_1 с осью z матрицей
- Ф3: $\{O_3, |V_1|z^0\} \rightarrow \{O_3, |V_2|z^0\}$ — масштабирование матрицей $M(\mu, \mu, \mu)$;
- Ф4: $\{O_3, |V_2|z^0\} \rightarrow \{O_3, V_2\}$ — совмещение вектора $|V_2|z^0$ с V_2 матрицей

$A_p^{-1}(V_2)$;

- Ф5: $\{O_3, V_2\} \rightarrow \{o_2, V_2\}$ — перенос из начала координат в o_2 матрицей $T(o_2)$.

С учетом того, что фазы Ф2 и Ф4 включают до двух ЭП, суммарное число ЭП достигает семи. Матрица полного АП вычисляется по достаточно длинной формуле

$$C = T(-o_1) \tilde{A}_p(V_1) \tilde{M}(\mu, \mu, \mu) \tilde{A}_p^{-1}(V_2) T(o_2). \quad (2.49)$$

На рис. 2.30 изображены выполняемые по описанному алгоритму фазы преобразования несимметричного объекта — двухцветного флажка, древко которого задает вектор направления V . Оказывается, что конечное состояние $\{o_2, V_2\}$ не полностью совпадает с результатом экономичного движения, изображенным на рис. 2.29. Совпали лишь концы вектора V_2 . Остальные точки

объекта дополнительно поворачиваются вокруг оси на угол вплоть до значения 180° при $|\alpha_1 - \alpha_2| = 180^\circ$.

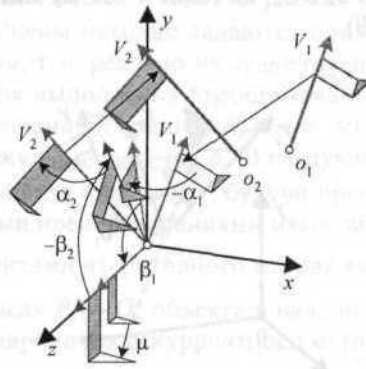


Рис. 2.30

В чем причина такого нежелательного эффекта? Очевидно в том, что сложное АП (2.49) не является экономичным: *четыре элементарных вращения объекта на углы $-\alpha_1$, β_1 , α_2 и $-\beta_2$, не лежащие в одной плоскости, не дают в совокупности кратчайшего угла.* Таким образом, **метод разложения с промежуточной ориентацией объекта вдоль координатной оси не может дать экономичного алгоритма решения кинематической задачи.**

- В *экономичном* варианте алгоритма по *методу разложения* явно присутствует кратчайшее вращение объекта на угол $\psi > 0$, заключенный между векторами V_1 и V_2 (см. рис. 2.29). Значение этого угла $\psi = \arccos(\rho)$ определяется скалярным произведением $\rho = \overline{V_1} \circ \overline{V_2}$. Ось кратчайшего вращения ортогональна плоскости $\{o_2, V_1, V_2\}$ и имеет направление нормали $N = V_1 \times V_2$. В случае $V_1 \parallel V_2$, когда $|\rho| = 1$, можно выбрать вектор $N = V_1 \times \omega^\circ$, ортогональный к V_1 и орту $\omega^\circ \# V_1$, где $\omega \in \{x, y, z\}$.

Фазы преобразования объекта (рис. 2.31) и их матрицы следующие:

- Ф1: $\{o_1, V_1\} \rightarrow \{O_3, V_1\}$ — перенос из точки o_1 в начало СК матрицей $T(-o_1)$;
- Ф2: $\{x, y, z\} \rightarrow \{x', y', z'\}$ — совмещение оси z с нормалью N матрицей $A_{op}(N)$;
- Ф3: $\{O_3, \mu V_1'\} \rightarrow \{O_3, V_2'\}$ — вращение вокруг оси z матрицей $R_z(\arccos(\rho))$, которую экономичнее вычислять по варианту (2.32) как

$$R_{2z}\left(\rho, \sqrt{1-\rho^2}\right)$$

без использования тригонометрических и обратных тригонометрических функций;

- Ф4: $\{x', y', z'\} \rightarrow \{x, y, z\}$ — восстановление СК матрицей $A_{3p}^{-1}(N)$;
- Ф5: $\{O_3, V_2'\} \rightarrow \{O_3, \mu V_2'\}$ — масштабирование матрицей $M(\mu, \mu, \mu)$;
- Ф6: $\{O_3, V_2\} \rightarrow \{o_2, V_2\}$ — перенос из начала координат в точку o_2 матрицей $T(o_2)$.

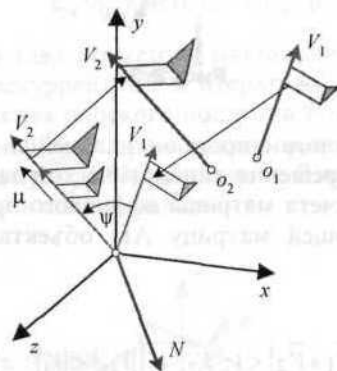


Рис. 2.31

В итоге матрица сложного АП, включающего до восьми ЭП, вычисляется по следующему алгоритму:

$$\begin{cases} \rho = \bar{V}_1 \circ \bar{V}_2, \quad \mu = \frac{|V_2|}{|V_1|}, \quad N = V_1 \times \text{if}(|\rho| < 1: V_2, \text{ if}(|V_{1z}| < |V_1|: z^0, y^0)), \\ C = T(-o_1) \tilde{A}_{3p}(N) \tilde{R}_{2z}(\rho, \sqrt{1-\rho^2}) \tilde{A}_{3p}^{-1}(N) \tilde{M}(\mu, \mu, \mu) T(o_2). \end{cases} \quad (2.50)$$

• По методу парных точек построим две ортогональные системы векторов, связанные с исходным и конечным состояниями объекта (рис. 2.32):

- вычислив нормаль $N = V_1 \times V_2$ (если $V_1 \parallel V_2$, то при $V_1 \neq z^0$ полагаем $N = V_1 \times z^0$, а при $V_1 \parallel z^0$ — $N = V_1 \times y^0$) и бинормаль $W_1 = V_1 \times N$, получим исходную систему векторов на четырех точках:

$$\{o_1, o_1 + V_1, o_1 + N, o_1 + W_1\};$$

- вычислив коэффициент подобия $\mu = |V_2| / |V_1|$ и бинормаль $W_2 = V_2 \times N$, получим конечную систему векторов на четырех точках:

$$\{o_2, o_2 + V_2, o_2 + \mu N, o_2 + W_2\}.$$

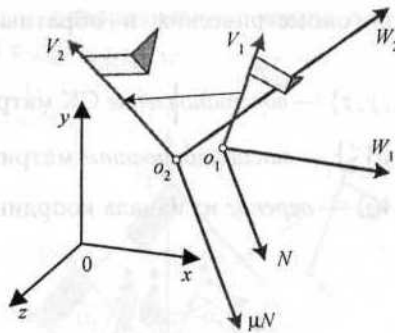


Рис. 2.32

В связи с простотой, экономичностью и дальнейшим широким использованием оформим алгоритм решения кинематической задачи методом парных точек в виде **функции расчета матрицы аффинного преобразования по двум парам точек**, возвращающей матрицу АП объекта из состояния $\{p_1, V_1\}$ в состояние $\{p_2, V_2\}$.

□ $MAP2(o_1, V_1, o_2, V_2)$

$$\{ N = V_1 \times \text{if}(|\bar{V}_1 \circ \bar{V}_2| < 1: V_2, \text{ if}(|V_{1z}| < |V_1|: z^0, y^0)), \mu = \frac{|V_2|}{|V_1|};$$

возврат матрицы

$$C = \begin{bmatrix} o_1 & 1 \\ o_1 + V_1 & 1 \\ o_1 + N & 1 \\ o_1 + V_1 \times N & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} o_2 & 1 \\ o_2 + V_2 & 1 \\ o_2 + \mu N & 1 \\ o_2 + V_2 \times N & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.51)$$

□

Ортогональность векторов обращаемой в (2.51) матрицы обеспечивает ее наилучшую обусловленность. Единственное условие существования решения — ненулевые векторы V_1 и V_2 . Численные значения матриц, вычисленных по алгоритмам (2.50) и (2.51), совпадают, т. к. кинематическая задача имеет единственное экономичное решение. Трудоемкость же метода парных точек существенно меньше.

Расчет матрицы преобразования системы координат из состояния $\{o_1, V_1\}$ в состояние $\{o_2, V_2\}$ выполняется функцией

$$MAP2(o_2, V_2, o_1, V_1) = MAP2(o_1, V_1, o_2, V_2)^{-1}.$$

В качестве параметров начального состояния можно выбрать начало координат $o_1 = O_3$ и один из ортов, например, $V_1 = z^0$. Тогда преобразование с матрицей

$$C_K(o, V) = MAP2(o, \bar{V}, O_3, z^0)$$

переводит начало СК в точку o , а ось z' ориентирует по направлению вектора V . Положение осей x' и y' не регламентируется. Такая неопределенность ориентации системы координат вполне допустима в задачах на преобразования относительно только одной оси. Например, это вращение вокруг оси $\{o, V\}$ на угол ψ , выполняемое матрицей

$$C_K(o, V) \tilde{R}_z(\psi) C_K^{-1}(o, V),$$

или отражение от плоскости $\{o, M\}$ с помощью матрицы

$$C_K(o, N) \tilde{M}(1, 1, -1) C_K^{-1}(o, N).$$

Сравним три алгоритма (два по методу разложения и один по методу парных точек) и два подхода (рекуррентный и итеративный) решения кинематической задачи на примере движения плоского полигона P через последовательность состояний $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_m \rightarrow P_1$, равномерно распределенных по окружности радиуса r в плоскости xy (рис. 2.33). Состояние P_i задается точкой центра полигона и вектором нормали к его плоскости:

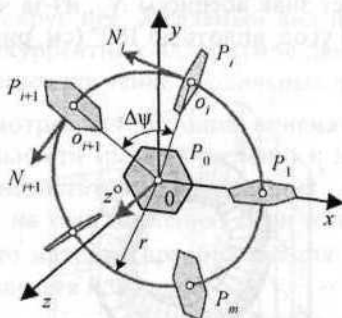


Рис. 2.33

$$o_i = r x^0 R_z((i-1)\Delta\psi), \quad N_i = y^0 R_z((i-1)\Delta\psi), \quad \text{где } \Delta\psi = 2\pi/m.$$

Соединение соседних состояний каждой из вершин полигона отрезками прямых в совокупности с изображением самих полигонов дает поверхность, классифицируемую в гл. 3 как трубчатая. Скручивание продольных каркасных линий наглядно свидетельствует о вращении полигона вокруг своей оси (нормали) на переходах между состояниями. На рис. 2.34, а изображена полностью определенная эталонная поверхность без осевого вращения, поперечные сечения которой (состояния полигона) рассчитаны по формуле

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_0 \tilde{R}_x(-\pi/2) \tilde{R}_z(i\Delta\psi) \Gamma(o_i) \quad \forall i = \overline{1, m} \quad (2.52)$$

при $m = 36$, где $P_0 \in xy$ — состояние полигона с центром в начале координат и нормалью z^0 .

Наилучшие результаты — полное совпадение с эталоном — дали экономичные алгоритмы на основе рекуррентного подхода со следующими матрицами преобразований на переходе $P_i \rightarrow P_{i+1}$:

- по рекуррентному методу разложения (2.50)

$$\begin{cases} \rho_i = \bar{N}_i \circ \bar{N}_{i+1}, & W_i = N_i \times \text{if}(|\rho_i| < 1: N_{i+1}, \text{if}(|N_{iz}| < |N_i|: z^0, y^0)), \\ C_i = T(-o_i) \tilde{A}_{\text{зр}}(W_i) \tilde{R} 2_z(\rho_i, \sqrt{1 - \rho_i^2}) \tilde{A}_{\text{зр}}^{-1}(W_i) T(o_{i+1}); \end{cases} \quad (2.53)$$

- по рекуррентному методу парных точек (2.51)

$$C_i = \text{MAP2}(o_i, N_i, o_{i+1}, N_{i+1}). \quad (2.54)$$

Остальные алгоритмы проносят полигон через состояния P_i неэкономично, с дополнительным вращением вокруг нормали, что визуально наблюдается как скручивание продольных каркасных линий. Алгоритмы различаются степенью неравномерности угла скручивания по траектории движения полигона:

- по методу разложения (2.49) как в рекуррентной, так и итеративной формах неравномерная скрутка поверхности (рис. 2.34, б) наблюдается на тех участках, где вектор N_i меняет знак абсциссы N_{ix} , из-за чего происходит вращение полигона на некоторый угол, вплоть до 180° (см. рис. 2.30);

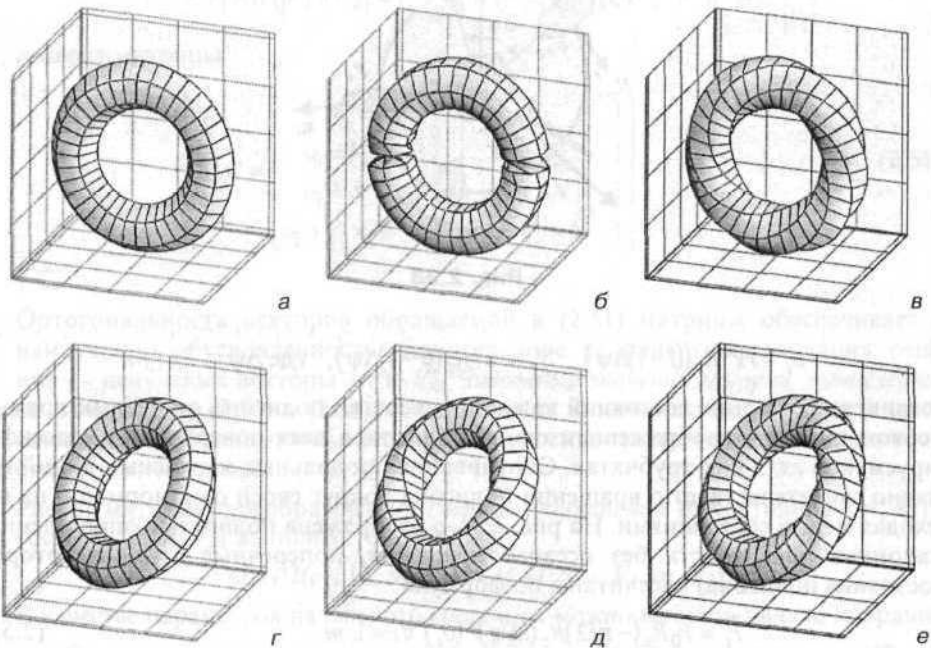


Рис. 2.34

- итеративные методы экономичного разложения (2.50) и парных точек (2.51) дают равномерное скручивание (рис. 2.34, в), объясняемое тем, что экономичные переходы полигона $P_0 \rightarrow P_i$ и $P_0 \rightarrow P_{i+1}$ не эквивалентны экономичному рекуррентному переходу $P_i \rightarrow P_{i+1}$.

На рис. 2.34, з, д, е показаны результаты моделирования переходов полигона по траектории произвольно расположенной в пространстве окружности. Рекуррентные алгоритмы экономичного метода разложения (2.53) и парных точек (2.54) еще раз подтвердили свою работоспособность (см. рис. 2.34, г) в отличие от других изученных алгоритмов моделирования (см. рис. 2.34, д, е).

Может возникнуть естественный вопрос: если есть точный метод кинематического расчета (2.52), то зачем нужны другие алгоритмы, некоторые из которых дают нежелательные визуальные эффекты движения? Ответ прост: в общем случае движение может быть не полностью определенным. Например, трубчатая поверхность формируется протягиванием контура ее поперечного сечения по траектории осевой линии, но *как* ориентирован контур в каждом сечении — этот момент не оговаривается. Изображение такой поверхности выглядит неестественно, если ее продольные каркасные линии проходят не параллельно осевой линии, а закручиваются вокруг нее. Желаемый вид поверхности достигается с помощью экономичных рекуррентных алгоритмов движения, которые дают минимальное или вообще нулевое кручение продольных линий.

Общий недостаток рассмотренных методов кинематических преобразований состоит в их нечувствительности (разной степени) к вращению объекта вокруг собственной оси из-за недостаточности задания только двух пар точек $\{o_1, o_1 + V_1\}$ и $\{o_2, o_2 + V_2\}$ на оси движения. Если известна *третья* пара точек $o_1 + W_1$ и $o_2 + W_2$ вне оси, то матрица преобразования $\{o_1, V_1, W_1\} \rightarrow \{o_2, V_2, W_2\}$ находится по (2.13) после расчета нормалей

$$N_1 = V_1 \times W_1 \neq O_3, \quad N_2 = V_2 \times W_2 \neq O_3$$

и четвертой пары точек $o_1 + N_1$ и $o_2 + N_2$.

Оформим данный метод в виде **функции расчета матрицы аффинного преобразования по трем парам точек**, возвращающей матрицу преобразования объекта из состояния $\{o_1, V_1, W_1\}$ в состояние $\{o_2, V_2, W_2\}$.

$$\text{МАРЗ}(o_1, V_1, W_1, o_2, V_2, W_2)$$

{возврат матрицы

$$C = \begin{bmatrix} o_1 & 1 \\ o_1 + V_1 & 1 \\ o_1 + W_1 & 1 \\ o_1 + V_1 \times W_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} o_2 & 1 \\ o_2 + V_2 & 1 \\ o_2 + W_2 & 1 \\ o_2 + V_2 \times W_2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.55)$$

} □

Для преобразования СК из исходного положения $\{O_3, x^0, y^0, z^0\}$ необходимо знать ее новое начало o и неколлинеарные векторы V и W , задающие новые направления осей x' и y' . Матрица такого преобразования СК равна

$$C_K = \text{МАРЗ}(o, \bar{V}, \bar{W}, O_3, x^0, y^0).$$

Наконец, если известны *четыре* пары некопланарных точек объекта в начальном и конечном состояниях, то для расчета матриц преобразования объекта C и системы координат C_K используются формулы (2.13) и (2.14) при $n = 3$. Состояния объекта могут быть также полностью определены точками o_1, o_2 и тройками некопланарных векторов $\{V_1, W_1, U_1\}$ и $\{V_2, W_2, U_2\}$. Для этого случая введем **функцию расчета матрицы аффинного преобразования по четырем парам точек**.

▢ $\text{МАР4}(o_1, V_1, W_1, U_1, o_2, V_2, W_2, U_2)$

{возврат матрицы

$$C = \begin{bmatrix} o_1 & 1 \\ o_1 + V_1 & 1 \\ o_1 + W_1 & 1 \\ o_1 + U_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} o_2 & 1 \\ o_2 + V_2 & 1 \\ o_2 + W_2 & 1 \\ o_2 + U_2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.56)$$

} ▢

Эту функцию можно использовать для преобразования координат точки p из исходной СК $\{O_3, x^0, y^0, z^0\}$ в другую декартову (не обязательно правую и ортонормированную) систему координат с началом в точке o и осями x', y', z' , направления и масштабы которых заданы базисными векторами V, W и U :

$$\tilde{p}' = \tilde{p} C_K, \text{ где } C_K = \text{МАР4}(o, V, W, U, O_3, x^0, y^0, z^0). \quad (2.57, a)$$

Аналогично решается задача преобразования точки $p \in \mathbb{R}^2$ из СК $\{O_2, x^0, y^0\}$ в другую декартову СК, имеющую начало в точке o и базисные векторы V и W :

$$\tilde{p}' = \tilde{p} C_K, \text{ где } C_K = \begin{bmatrix} o & 1 \\ o + V & 1 \\ o + W & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.57, б)$$

Преобразование координат — полезный инструмент определения принадлежности точки q некоторым специальным геометрическим объектам при выполнении совокупности условий-неравенств \mathfrak{R} для координат преобразов q' , вычисленных по (2.57):

- плоским *параллелограмму* Π и *треугольнику* T с одной из вершин в точке o и выходящими из нее векторами сторон V и W (рис. 2.35):

$$\Pi: \mathfrak{R} = \{0 \leq x' \leq 1\} \cap \{0 \leq y' \leq 1\}; \quad (2.58, a)$$

$$T: \mathfrak{R} = \{x' \geq 0\} \cap \{y' \geq 0\} \cap \{x' + y' \leq 1\}. \quad (2.58, б)$$

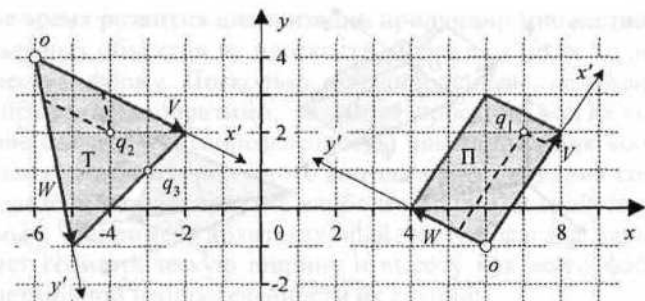


Рис. 2.35

Например, для параллелограмма Π с элементами $o = [6 \ -1]$, $V = [2 \ 3]$ и $W = [-2 \ 1]$ получим матрицу преобразования

$$C_K = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 & -0.375 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & 1 \\ -0.25 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Точки

$$q_1 = [7 \ 2], q_2 = [-4 \ 2], q_3 = [-3 \ 1]$$

имеют в СК $\{o, V, W\}$ координаты

$$q'_1 = [0.875 \ 0.375], q'_2 = [-0.5 \ 4.5], q'_3 = [-0.625 \ 3.875].$$

По (2.58, а) определяем, что точка q_1 лежит внутри параллелограмма, а точки q_2 и q_3 — вне его. Эти же точки в системе координат треугольника T с элементами $o = [-6 \ 4]$, $V = [4 \ -2]$, $W = [1 \ -5]$ и матрицей преобразования

$$C_K = \begin{bmatrix} 0.278 & -0.111 & 1 \\ 0.056 & -0.222 & 1 \\ 1.444 & -0.222 & 1 \end{bmatrix}$$

имеют координаты

$$q'_1 = [3.5 \ -1], q'_2 = [0.444 \ 0.222], q'_3 = [0.667 \ 0.333].$$

По (2.58, б) определяем, что $q_1 \notin T$, $q_2 \in T$, а точка q_3 принадлежит границе T ;

- объемным параллелепипеду Π и треугольной пирамиде T с одной из вершин в точке o и выходящими из нее векторами ребер V, W и U (рис. 2.36):

$$\Pi: \mathfrak{R} = \{0 \leq x' \leq 1\} \cap \{0 \leq y' \leq 1\} \cap \{0 \leq z' \leq 1\}; \quad (2.59, a)$$

$$T: \mathfrak{R} = \{x' \geq 0\} \cap \{y' \geq 0\} \cap \{z' \geq 0\} \cap \{x' + y' + z' \leq 1\}. \quad (2.59, б)$$

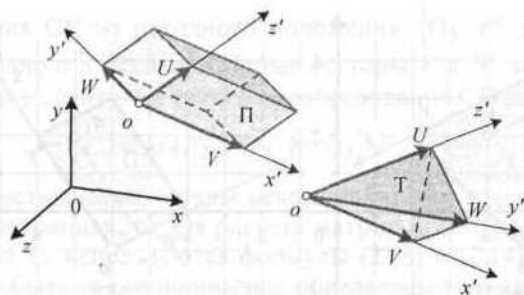


Рис. 2.36

2.2. Проективные преобразования

Проецирование (от лат. *projectio* — выбрасывать вперед) — это отображение трехмерного объекта на двухмерную *картинную плоскость* (КП). Получение проекции базируется на методе трассировки лучей: из *центра проецирования* S (*проектора*) проводятся лучи через каждую точку объекта до пересечения с КП (рис. 2.37). След, образуемый точками пересечения лучей с КП, составляет *проекцию* объекта. Если *фокусное расстояние* F во много раз больше габаритов объекта и расстояния d от источника лучей до объекта, то пучок проецирующих лучей можно считать параллельным, а источник — дальним. Такая *идеализация* отображения объемного мира на плоский экран облегчает построение проекций, за что приходится платить ухудшением реалистичности изображений.

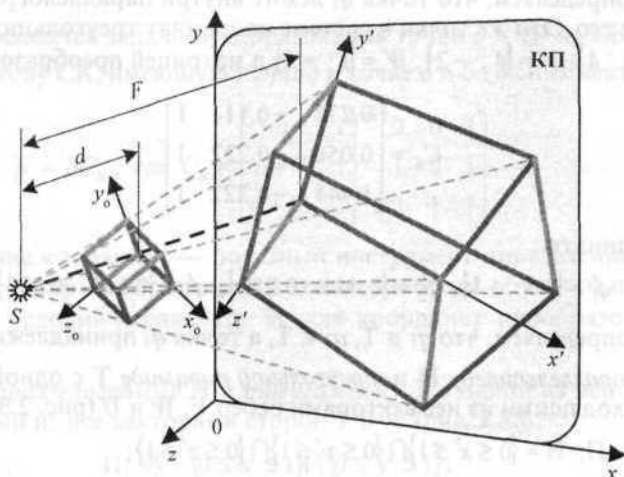


Рис. 2.37

За длительное время развития цивилизации придумано множество способов изображения объемных объектов на плоскости, более или менее точно передающих их геометрическую форму. Поскольку проецирование — не аффинное преобразование и в принципе необратимо, то любая проекция всегда содержит в себе ошибку (лучше сказать — неопределенность) восстановления координат объекта-образа. Назначение того или иного метода проецирования состоит в уменьшении неопределенности восприятия наиболее значимых свойств объекта за счет менее значимых. Например, архитектурный чертеж фасада здания абсолютно точно передает геометрическую ширину и высоту как всего фасада, так и его деталей, за счет полной неопределенности их глубины.

К числу важнейших свойств метода проецирования относится *достоверность восприятия* объекта наблюдателем по его проекции, т. е. узнаваемость объекта по его плоскому изображению. Если свойство достоверности восприятия объявляется доминирующим, то наилучшей может стать "живая" проекция с далеко не минимальной геометрической неопределенностью. Например, изометрическая проекция несет искаженную информацию о размерах объекта во всех трех измерениях, но лучше передает форму объекта в целом по сравнению с изображением объекта в "фас".



Рис. 2.38

На рис. 2.38 приведена общепринятая *классификация проекций*, используемых для изображения трехмерных объектов или сцен на картинной плоскости. С учетом вышесказанного следует признать, что **наилучшей проекции не существует. Во-**

первых, критерий выбора проекции определяется ее назначением — достижение геометрической точности или получение эстетического удовлетворения. Вторых, "на вкус и цвет товарищей нет": автор данной книги, например, предпочитает диметрическую аксонометрическую проекцию (это видно по большинству рисунков), тогда как некоторые эстеты без ума от изометрии с ее чересчур правильной и скучной симметрией.

Для лучшего восприятия ориентации объектов в пространстве мы иногда будем рисовать вместе с проекциями объектов еще и проекции осей МСК $x'y'z'$, СКК $x'y'z'$ или ОСК $x'y'z'$. Эти проекции создаются по тем же алгоритмам, которые используются для изображения объектов.

2.2.1. Ортографические проекции

Для получения *ортографических* проекций (*видов*) оси ОСК ориентируются параллельно осям МСК, вдоль которых направляются пучки проецирующих лучей. Так как последние оказываются перпендикулярными координатным плоскостям, то в виде теряется информация о координате вдоль оси координат, параллельной пучку (рис. 2.39, а). Отдельные виды необратимы. Восстановление 3D-объекта возможно не менее чем по двум его видам, содержащим совместно все три координаты.

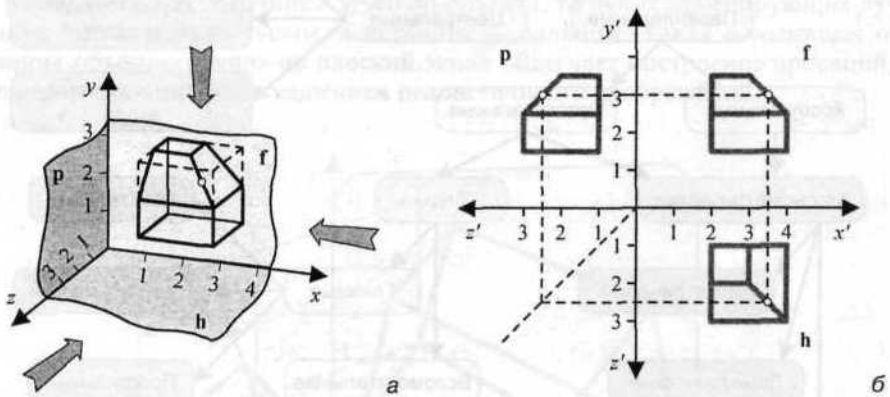


Рис. 2.39

С целью точной передачи размеров деталей в инженерной практике применяются *чертежи* в составе трех *главных видов* (рис. 2.39, б):

- спереди или *фронтальный* (*front*) на КП **f** (ФКП), совпадающую с координатной плоскостью МСК xy . У проекции p' точки p координаты равны

$$x' = x, y' = y, z' = 0;$$

- сверху или *горизонтальный (horizon)* на КП h — плоскость МСК xz . Координаты проекции точки p равны

$$x' = x, y' = 0, z' = z;$$

- справа или *профильный (profile)* на КП p — плоскость МСК yz . Координаты проекции точки p равны

$$x' = 0, y' = y, z' = z.$$

Если сплошной (не каркасный) объект имеет сложную форму, которую нельзя передать с помощью главных видов, то как исключение в чертежах приводятся *вспомогательные виды: левый, нижний и задний*.

Матрицы видового проецирования

$$O_f = \text{diag}[1 \ 1 \ 0], \quad O_h = \text{diag}[1 \ 0 \ 1], \quad O_p = \text{diag}[0 \ 1 \ 1] \quad (2.60)$$

вырождены, что подтверждает невозможность восстановления по формуле (2.2) всех трех координат точки только по одному ее виду.

Область применения видов — машиностроительное черчение, архитектура и другие приложения, требующие точных измерений по чертежу линейных и угловых размеров объектов благодаря параллельности измеряемых элементов плоскостям проецирования. Особое значение имеет фронтальное ортогональное проецирование с матрицей O_f как последняя фаза аксонометрического проецирования.

Создание на плоскости иллюзии объемности с помощью только *одного* изображения объекта возможно двумя способами.

- Во-первых, объект вместе с его ОСК подвергается преобразованиям вращения вокруг двух или трех неколлинеарных осей, в то время как проецирующие лучи остаются перпендикулярными к проективной плоскости. Так получают *ортогональные аксонометрические проекции*.
- Во-вторых, можно направить проецирующий пучок под углом к КП, осветив тем самым объект сбоку. Так образуются *косоугольные проекции* и их оптический аналог — тени объектов на плоскости.

2.2.2. Аксонометрические проекции

Выберем для определенности *фронтальную* КП проецирования и последовательность вращений объекта и его ОСК x_0, y_0, z_0 :

$$\Phi_y \rightarrow \Phi_x \rightarrow \Phi_z.$$

Такая очередность поворотов дает привычную вертикальную ориентацию проекции y' оси y_0 при произвольных углах первых двух вращений Φ_y и Φ_x . Лишь третье вращение ОСК на угол Φ_z поворачивает проекцию этой оси на такой же угол. В результате получим ориентацию ОСК относительно ФКП, изображенную на рис. 2.40.

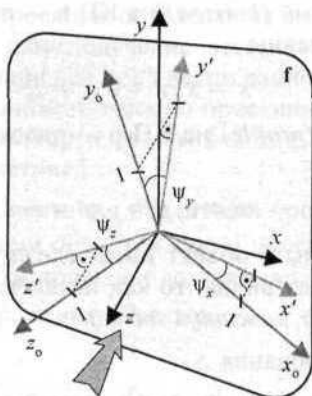


Рис. 2.40

Задача *аксонометрии* (от греч. *axón* — ось, *metreo* — измерять) состоит в определении координат проекций точек, осевых масштабов m_x, m_y, m_z и ориентации проекций осей ОСК x', y' и z' на ФКП. Рассчитаем матрицу сложного преобразования (трех вращений) объекта в неподвижной СК xyz :

$$R_{yzx} = R_y(\varphi_y)R_x(\varphi_x)R_z(\varphi_z) = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Ее (i, j) -ые элементы

$$\begin{cases} m_{xx} = \cos(\varphi_y)\cos(\varphi_z) - \sin(\varphi_x)\sin(\varphi_y)\sin(\varphi_z), \\ m_{xy} = \cos(\varphi_y)\sin(\varphi_z) + \sin(\varphi_x)\sin(\varphi_y)\cos(\varphi_z), & m_{xz} = -\cos(\varphi_x)\sin(\varphi_y), \\ m_{yx} = -\cos(\varphi_x)\sin(\varphi_z), & m_{yy} = \cos(\varphi_x)\cos(\varphi_z), & m_{yz} = \sin(\varphi_x), \\ m_{zx} = \sin(\varphi_y)\cos(\varphi_z) + \sin(\varphi_x)\cos(\varphi_y)\sin(\varphi_z), \\ m_{zy} = \sin(\varphi_y)\sin(\varphi_z) - \sin(\varphi_x)\cos(\varphi_y)\cos(\varphi_z), & m_{zz} = \cos(\varphi_x)\cos(\varphi_y) \end{cases} \quad (2.62)$$

есть j -ые координаты i -ых ортов ОСК. Получим соотношения для расчета *углов* ψ_x, ψ_y и ψ_z — *наклона осей ОСК к ФКП*:

$$\begin{cases} \sin(\psi_x) = m_{xz} = -\cos(\varphi_x)\sin(\varphi_y), \\ \sin(\psi_y) = m_{yz} = \sin(\varphi_x), \\ \sin(\psi_z) = m_{zz} = \cos(\varphi_x)\cos(\varphi_y), \end{cases} \quad (2.63)$$

из которых следуют независимость углов ψ_x , ψ_y и ψ_z от угла φ_z последнего в (2.61) вращения и условие связи углов

$$\sin^2(\psi_x) + \sin^2(\psi_y) + \sin^2(\psi_z) = 1. \quad (2.64)$$

Оно означает, что свободно могут быть выбраны только один или два угла наклона осей ОСК к ФКП. Примеры:

$$\square \psi_x = 45^\circ, \psi_y = 30^\circ \Rightarrow \sin^2(\psi_z) = 0.25 \Rightarrow \psi_z = 30^\circ;$$

$$\square \psi_x = 45^\circ, \psi_y = 45^\circ \Rightarrow \sin^2(\psi_z) = 0 \Rightarrow \psi_z = 0^\circ;$$

$$\square \psi_x = 90^\circ \Rightarrow \psi_x = \psi_z = 0^\circ.$$

Из (2.63) следует решение обратной задачи: для получения желаемых углов ψ_x , ψ_y и ψ_z углы вращения ОСК следует выбирать из условий

$$\varphi_x = \psi_y, \varphi_y = -\arcsin\left(\frac{\sin(\psi_x)}{\cos(\psi_y)}\right) = \arccos\left(\frac{\sin(\psi_z)}{\cos(\psi_y)}\right). \quad (2.65)$$

Масштабные коэффициенты осевых искажений

$$\begin{cases} m_x = \sqrt{m_{xx}^2 + m_{xy}^2} = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi_x) \sin^2(\varphi_y)} = \cos(\psi_x) \leq 1, \\ m_y = \sqrt{m_{yx}^2 + m_{yy}^2} = |\cos(\varphi_x)| = \cos(\psi_y) \leq 1, \\ m_z = \sqrt{m_{zx}^2 + m_{zy}^2} = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi_x) \cos^2(\varphi_y)} = \cos(\psi_z) \leq 1 \end{cases} \quad (2.66)$$

есть длины отрезков — проекций ортов ОСК на КП. Из (2.64) и (2.66) следует условие взаимосвязи масштабов:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2. \quad (2.67)$$

Как и в (2.64), свободно могут быть выбраны только один или два масштаба. Иногда нужно обеспечить желаемые соотношения масштабов

$$m_x : m_y : m_z = k_x : k_y : k_z.$$

Тогда, приняв $m_i = ck_i$, из условия (2.67) получим

$$c = \sqrt{\frac{2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}, \quad m_i = k_i \sqrt{\frac{2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}. \quad (2.68)$$

Ориентация проекций осей ОСК на ФКП может быть определена, например, углами γ_y , γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{zx} (рис. 2.41), причем $\gamma_{xy} + \gamma_{yz} + \gamma_{zx} = 360^\circ$:

$$\cos(\gamma_y) = \frac{m_{yy}}{m_y} = \cos(\varphi_z) \Rightarrow \gamma_y = \varphi_z; \quad (2.69, a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(\gamma_{xy}) &= \frac{m_{xx}m_{yx} + m_{xy} + m_{yy}}{m_x m_y} = \frac{\sin(\varphi_x)\sin(\varphi_y)}{\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_x)\sin^2(\varphi_y)}}, \\ \cos(\gamma_{yz}) &= \frac{m_{yx}m_{zx} + m_{yy} + m_{zy}}{m_y m_z} = \frac{-\sin(\varphi_x)\cos(\varphi_y)}{\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_x)\cos^2(\varphi_y)}}, \\ \cos(\gamma_{zx}) &= \frac{m_{zx}m_{xx} + m_{zy} + m_{xy}}{m_z m_x} = \\ &= \frac{\cos^2(\varphi_x)\sin(\varphi_y)\cos(\varphi_y)}{\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_x)\sin^2(\varphi_y)}\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_x)\cos^2(\varphi_y)}}. \end{aligned} \right. \quad (2.69, б)$$

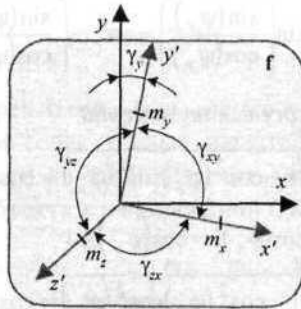


Рис. 2.41

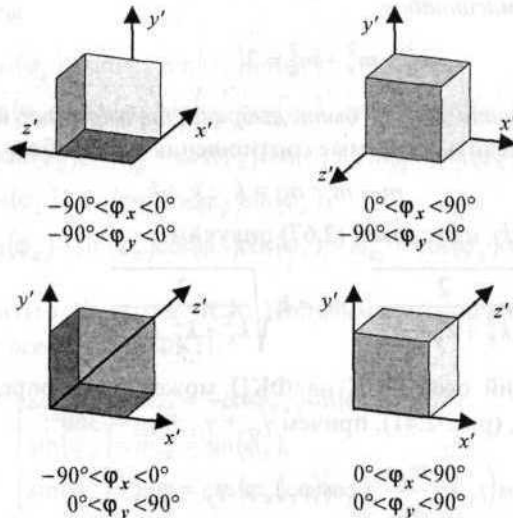


Рис. 2.42