

Изобразим на рис. 2.42 ориентации осей x' , y' , z' и моделей кубов в зависимости от знаков углов φ_x и φ_y . Из анализа (2.69) следуют **выводы**:

- только углы φ_x и φ_y определяют коэффициенты осевых искажений и углы между проекциями осей ОСК;
- только угол φ_z последнего поворота ОСК определяет угол γ , вертикальной ориентации проекции ОСК на ФКП. Именно поэтому вращение ОСК вокруг оси g выбрано последним, чтобы без него можно было получать разнообразные ракурсы изображения объекта с привычным *вертикальным* расположением оси y' .

Часто при построении аксонометрической проекции задаются масштабами m_x , m_y и m_z соответствующими единичным отрезкам на осях x' , y' и z' . Тогда остальные параметры ортогональной аксонометрической проекции можно рассчитать по вытекающим из (2.66) формулам:

$$\begin{cases} \cos^2(\varphi_x) = m_y^2, & \cos^2(\varphi_y) = \frac{1 - m_z^2}{m_y^2}, \\ \cos(\psi_x) = m_x, & \cos(\psi_y) = m_y, & \cos(\psi_z) = m_z, \\ \cos^2(\gamma_{xy}) = \frac{1 - m_x^2}{1 - m_y^2}, & \cos^2(\gamma_{yz}) = \frac{1 - m_y^2}{1 - m_z^2}, & \cos^2(\gamma_{zx}) = \frac{1 - m_z^2}{1 - m_x^2}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Полная матрица ортогонального аксонометрического преобразования на ФКП с учетом последней операции проецирования равна

$$A_f = R_{yxx} O_f = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} & 0 \\ m_{yx} & m_{yy} & 0 \\ m_{zx} & m_{zy} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.71, a)$$

Для того чтобы проекция имела вертикальную ориентацию оси y' ($\gamma_y = 0$), поворот объекта вокруг оси z не нужен, что следует из (2.69, а). При $\varphi_z = 0$ матрица фронтального аксонометрического проецирования вычисляется как матрица сложного преобразования

$$A_f = R_{yx} O_f$$

и с учетом (2.71, а) и (2.62) принимает вид

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_y) & \sin(\varphi_x)\sin(\varphi_y) & -\cos(\varphi_x)\sin(\varphi_y) \\ 0 & \cos(\varphi_x) & \sin(\varphi_x) \\ \sin(\varphi_y) & -\sin(\varphi_x)\cos(\varphi_y) & \cos(\varphi_x)\cos(\varphi_y) \end{bmatrix} O_f = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_y) & \sin(\varphi_x)\sin(\varphi_y) & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & 0 \\ \sin(\varphi_y) & -\sin(\varphi_x)\cos(\varphi_y) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.71, б)$$

Во многих задачах (построение теней и зеркальных отражений, расчет освещенности поверхностей и т. д.) требуется знать *вектор направления на источник проецирующих лучей*, выраженный в объектных координатах. В МСК это вектор S . Например, при фронтальном ортогональном проецировании $S = [0 \ 0 \ 1]$, при горизонтальном — $S = [0 \ 1 \ 0]$, профильном — $S = [1 \ 0 \ 0]$. Преобразование сцены матрицей C изменяет и координаты вектора S в ОСК. Их легко получить с помощью *обратного* преобразования, описываемого матрицей C^{-1} . Координаты вектора наблюдателя в ОСК вычисляются по формуле (2.15):

$$\bar{S}_0 = \bar{S} C^{-1}.$$

Обратная к (2.61) матрица равна

$$R_{yxz}^{-1} = R_z^{-1} R_x^{-1} R_y^{-1} = R_{yxz}^T,$$

откуда получаем вектор источника в ОСК:

$$S_0 = SR_{yxz}^T = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{yx} & m_{zx} \\ m_{xy} & m_{yy} & m_{zy} \\ m_{xz} & m_{yz} & m_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.72, a)$$

В частном случае фронтальной аксонометрии с вектором $\bar{S} = [0 \ 0 \ 1]$ и матрицей R_x с учетом (2.62) получим

$$\bar{S}_0 = [m_{xz} \ m_{yz} \ m_{zz}] = [-\cos(\varphi_x) \sin(\varphi_y) \ \sin(\varphi_x) \ \cos(\varphi_x) \cos(\varphi_y)]. \quad (2.72, б)$$

Рассмотрим построение *аксонометрической проекции окружности* $p(t)$ радиуса r , лежащей в плоскости Π под углом к КП, равным $90^\circ - \psi < 90^\circ$. Ее проекцией является *эллипс* $p'(t)$ с полуосями $a = r$ и $b = r \sin(\psi) < r$, ориентированными относительно проекции нормали к Π как $b \parallel N'$ и $a \perp N'$ (рис. 2.43, а).

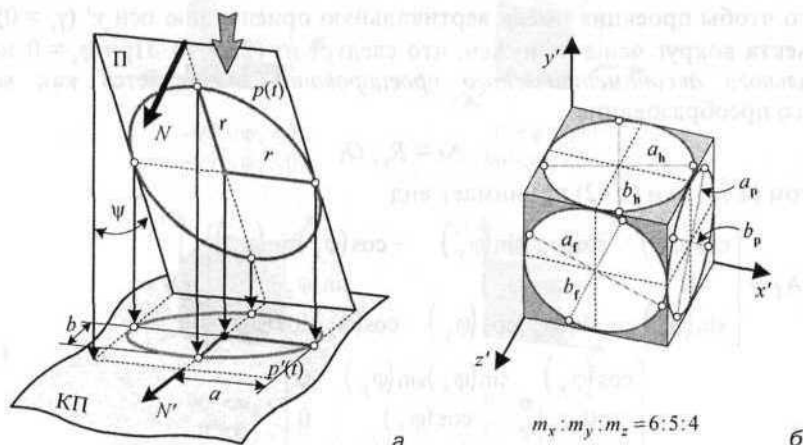


Рис. 2.43

Так как координатные плоскости ОСК образуют с ФКП углы $90^\circ - \psi_i$, то длины и ориентации полуосей эллипсов как проекций окружностей на гранях модельного куба (рис. 2.43, б) равны

$$\begin{cases} a_f = r \perp z', & a_h = r \perp y', & a_p = r \perp x', \\ b_f = r\sqrt{1-m_z^2} \parallel z', & b_h = r\sqrt{1-m_y^2} \parallel y', & b_p = r\sqrt{1-m_x^2} \parallel x'. \end{cases} \quad (2.73)$$

▣ **Пример 2.5.** Построить аксонометрическую проекцию куба со вписанными в его грани окружностями при соотношении масштабов $m_x : m_y : m_z = 6 : 5 : 4$.

Решение. Вычислив по (2.68)

$$c = \sqrt{\frac{2}{77}} = 0.1612, \quad m_x = 6c \approx 0.967, \quad m_y = 5c \approx 0.806, \quad m_z = 4c \approx 0.645,$$

определим по (2.69, б) углы ориентации проекций осей ОСК

$$\gamma_{xy} = 101.2^\circ, \quad \gamma_{yz} = 150.6^\circ, \quad \gamma_{zx} = 108.2^\circ,$$

а по (2.73) длины полуосей эллипсов

$$a_f = a_h = a_p = r, \quad b_f = 0.764r, \quad b_h = 0.592r, \quad b_p = 0.255r,$$

являющихся фронтальными проекциями окружностей радиуса r на передней, верхней и правой гранях куба. Изображение объекта приведено на рис. 2.43, б. Для его построения по (2.69, а), (2.70) и (2.71, б) рассчитаны следующие углы вращения объекта и матрица проецирования:

$$\varphi_y = -18.4^\circ, \quad \varphi_x = 36.3^\circ, \quad \varphi_z = 0^\circ, \quad A_f = \begin{bmatrix} 0.949 & -0.187 & 0 \\ 0 & 0.806 & 0 \\ -0.316 & -0.562 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Таким образом, мы рассмотрели основы аксонометрии — методики построения самой общей *триметрической* ортогональной проекции, у которой все осевые масштабы попарно не равны друг другу. Количество триметрических проекций бесконечно, стандартная триметрия отсутствует.

В *диметрических* проекциях два из трех масштабов равны друг другу, что дает три варианта выбора углов вращения ОСК.

□ Если $m_x = m_y \neq m_z$, то из (2.66) получим $\sin^2(\varphi_y) = \text{tg}^2(\varphi_x)$, откуда

$$\begin{cases} |\varphi_x| = |\arctg(\sin(\varphi_y))|, \\ m_x = m_y = |\cos(\varphi_x)|, \quad m_y = \sqrt{2}|\sin(\varphi_x)|, \\ \cos^2(\gamma_{yz}) = \cos^2(\gamma_{zx}) = \frac{\text{tg}(\varphi_x)}{\text{tg}(2\varphi_x)}, \\ b_f = r\sqrt{|\cos(2\varphi_x)|}, \quad b_h = b_p = r|\sin(\varphi_x)|. \end{cases}$$

Например, выбрав $\varphi_y = -60^\circ$, получим $\operatorname{tg}^2(\varphi_x) = 0.75$. Из четырех возможных углов выберем

$$\varphi_x = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 40.9^\circ$$

и определим параметры диметрической проекции куба на рис. 2.44, а:

$$m_x = m_y = 0.756, m_z = 0.926, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 110.7^\circ, \gamma_{xy} = 138.6^\circ.$$

- Если $m_y = m_z = m_x$, то из (2.66) получим $\cos^2(\varphi_y) = \operatorname{tg}^2(\varphi_x)$, откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi_x| = |\operatorname{arctg}(\cos(\varphi_y))|, \\ m_x = \sqrt{2}|\sin(\varphi_x)|, \quad m_y = m_z = |\cos(\varphi_x)|, \\ \cos^2(\gamma_{xy}) = \cos^2(\gamma_{zx}) = \frac{|\operatorname{tg}(\varphi_x)|}{|\operatorname{tg}(2\varphi_x)|}, \\ b_f = b_h = r|\sin(\varphi_x)|, \quad b_p = r\sqrt{|\cos(2\varphi_x)|}. \end{array} \right.$$

Например, выбрав $\varphi_y = -30^\circ$, получим $\operatorname{tg}^2(\varphi_x) = 0.75$. Из четырех возможных углов выберем

$$\varphi_x = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 40.9^\circ$$

и определим параметры диметрической проекции куба на рис. 2.44, б:

$$m_x = 0.926, m_y = m_z = 0.756, \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 110.7^\circ, \gamma_{yz} = 138.6^\circ.$$

- Если $m_x = m_z = m_y$, то из (2.66) получим $\sin^2(\varphi_y) = \cos^2(\varphi_x)$, т. е. выбор углов вращения ОСК должен быть таков: $\varphi_y \in \{\pm 45^\circ, \pm 135^\circ\}$, φ_x — любой. Тогда параметры диметрической проекции имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m_x = m_z = \frac{\sqrt{3 - \cos(2\varphi_x)}}{2}, \quad m_y = |\cos(\varphi_x)|, \\ \cos^2(\gamma_{xy}) = \cos^2(\gamma_{yz}) = \frac{1 - \cos(2\varphi_x)}{3 - \cos(2\varphi_x)}, \\ b_f = b_p = \frac{|\cos(\varphi_x)|}{\sqrt{2}}r, \quad b_h = r|\sin(\varphi_x)|. \end{array} \right.$$

Например, выбрав $\varphi_y = -45^\circ$ и $\varphi_x = 15^\circ$, получим параметры диметрической проекции куба на рис. 2.44, в:

$$m_x = m_z = 0.73, m_y = 0.966, \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 104.5^\circ, \gamma_{xz} = 151^\circ.$$

В стандартной диметрической проекции соотношение масштабов составляет

$$m_x : m_y : m_z = 2 : 2 : 1.$$

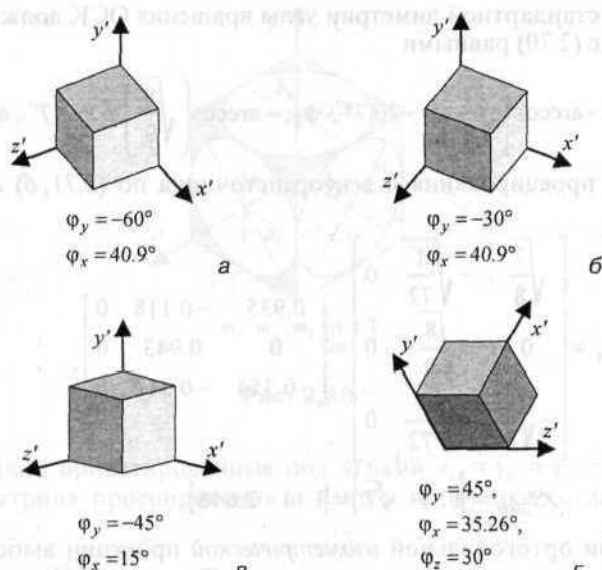


Рис. 2.44

Тогда по (2.34) определяем

$$m_x = m_y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.943, \quad m_z = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.471,$$

а остальные параметры этой проекции (рис. 2.45) равны

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 131.4^\circ, \quad \gamma_{yx} = 97.2^\circ, \quad b_f = \frac{\sqrt{7}}{3} r \approx 0.882r, \quad b_h = b_p = \frac{r}{3} \approx 0.333r.$$

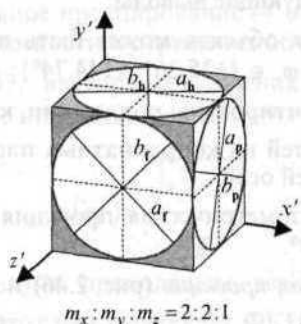


Рис. 2.45

Для получения стандартной диметрии углы вращения ОСК должны быть заданы в соответствии с (2.70) равными

$$\varphi_y = -\arccos\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) \approx -20.7^\circ, \quad \varphi_x = \arccos\left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right) \approx 19.47^\circ, \quad \varphi_z = 0^\circ,$$

тогда матрица проецирования и вектор источника по (2.71,6) и (2.72,6) будут равны

$$A_{\text{дим}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{7}{8}} & -\sqrt{\frac{1}{72}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{8}{9}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{8}} & -\sqrt{\frac{7}{72}} & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.935 & -0.118 & 0 \\ 0 & 0.943 & 0 \\ -0.354 & -0.312 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

$$S_{\text{дим}} = [1 \quad 1 \quad \sqrt{7}] = [1 \quad 1 \quad 2.646].$$

При построении ортогональной *изометрической* проекции выбор углов вращения ОСК φ_x и φ_y связан условием $m_x = m_y = m_z$. Тогда из (2.68) получаем

$$m_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816,$$

а из (2.70) и (2.73) следуют соотношения

$$\begin{cases} \cos^2(\varphi_x) = \frac{2}{3}, & \cos^2(\varphi_y) = \frac{1}{2}, \\ \cos^2(\gamma_{xy}) = \cos^2(\gamma_{yz}) = \cos^2(\gamma_{zx}) = \frac{1}{4}, \\ b_f = b_h = b_p = \frac{1}{\sqrt{3}}r = 0.577r. \end{cases}$$

Из этого можно сделать следующие выводы:

- изометрическая проекция объекта может быть получена вращением его на углы $\varphi_y \in \{\pm 45^\circ, \pm 135^\circ\}$ и $\varphi_x \in \{\pm 35.26^\circ, \pm 144.74^\circ\}$;
- проекции осей ОСК ориентированы под углами, кратными 60° ;
- проекции всех окружностей на координатных плоскостях ОСК подобны, отличаясь лишь ориентацией осей.

На рис. 2.44, г построена изометрическая проекция куба при углах вращения $\varphi_y = 45^\circ$, $\varphi_x = 35.26^\circ$ и $\varphi_z = 30^\circ$.

Стандартная изометрическая проекция (рис. 2.46) получается при углах вращения объекта

$$\varphi_y = -45^\circ, \quad \varphi_x = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 35.26^\circ, \quad \varphi_z = 0^\circ,$$

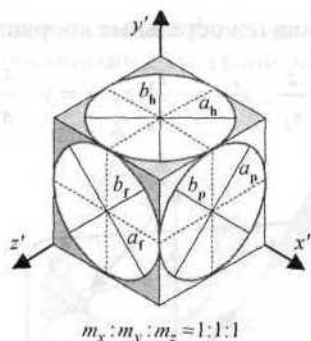


Рис. 2.46

имеет симметрично ориентированные под углами $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 120^\circ$ проекции осей ОСК, а матрица проецирования и вектор источника согласно (2.71, б) и (2.72, б) равны

$$A_{\text{изо}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.707 & -0.408 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 \\ -0.707 & -0.408 & 0 \end{bmatrix}, S_{\text{изо}} = [1 \ 1 \ 1]. \quad (2.75)$$

2.2.3. Косоугольные проекции

Косоугольное проецирование отличается от ортогонального тем, что в нем для объемного видения объекта пучок параллельных проецирующих лучей не ортогонален КП. При этом сам объект и его ОСК остаются *неподвижными*. Соответственно, $S_{\text{кос}} = S$. Косоугольное проецирование — основной инструмент для построения тени объекта на плоскости и отражения объекта в плоском зеркале.

Как, показано, на рис. 2.47, вектор направления на проецирующий пучок $S = [s_x \ s_y \ s_z]$ составляет с нормалью к ФКП *угол проецирования* λ_f такой, что

$$\text{tg}(\lambda_f) = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{s_z}.$$

Параметрическая функция луча, проходящего через точку $p = [x \ y \ z]$ в направлении $-S$, есть $p - St$. Этот луч пересекает ФКП в точке $p' = [x' \ y' \ z']$. Из условия

$$z' = z - s_z t_f = 0$$

получим параметр пересечения t_f и остальные координаты точки $p' \in f$:

$$t_f = \frac{z}{s_z}, \quad x' = x - \frac{s_x}{s_z} z, \quad y' = y - \frac{s_y}{s_z} z.$$

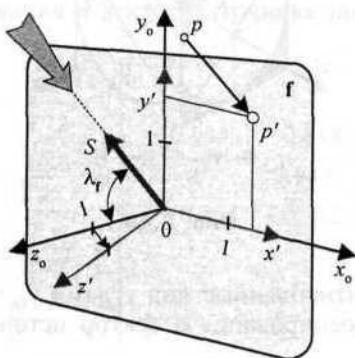


Рис. 2.47

В векторной форме

$$p' = pK_f$$

косоугольное проецирование на ФКП описывается матрицей

$$K_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_x & -c_y & 0 \end{bmatrix}, \quad c_x = \frac{s_x}{s_z}, \quad c_y = \frac{s_y}{s_z}. \quad (2.76)$$

Получим коэффициенты осевых искажений, проецируя косоугольно орты ОСК на ФКП:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_x & -c_y & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow m_x = m_y = 1, \quad m_z = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \operatorname{tg}(\lambda_f). \quad (2.77)$$

Углы ориентации проекций осей ОСК на ФКП определяются условиями

$$\gamma_{xy} = 90^\circ, \quad \operatorname{tg}(\gamma_{yz}) = -\frac{c_x}{c_y} = -\frac{s_x}{s_y}, \quad \operatorname{tg}(\gamma_{zx}) = -\frac{c_y}{c_x} = -\frac{s_y}{s_x}. \quad (2.78)$$

Окружности в плоскостях, параллельных КП, проецируются в окружности, т. е. без искажений (рис. 2.48). Это главное отличие и основное преимущество косоугольного проецирования перед аксонометрическим, позволяющее избежать построения эллипсов с произвольной ориентацией полуосей.

На рис. 2.48, (7 изображена косоугольная фронтальная проекция сцены, состоящей из модельного куба с вписанными в его грани окружностями и осями ОСК.

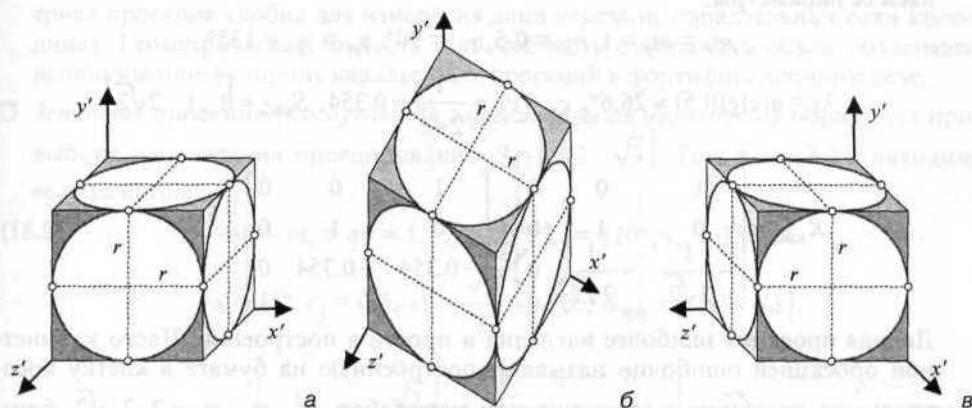


Рис. 2.48

Приведем по аналогии без вывода формулы расчета параметров косоугольных горизонтальной (рис. 2.48, б)

$$K_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_x & 0 & -c_z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_x = \frac{s_x}{s_y}, \quad c_z = \frac{s_z}{s_y}, \quad (2.79, a)$$

$$m_x = m_z = 1, \quad m_y = \sqrt{c_x^2 + c_z^2} = \operatorname{tg}(\lambda_h), \quad (2.79, б)$$

$$\gamma_{zx} = 90^\circ, \quad \operatorname{tg}(\gamma_{yz}) = -\frac{c_x}{c_z} = -\frac{s_x}{s_z}, \quad \operatorname{tg}(\gamma_{xy}) = -\frac{c_z}{c_x} = -\frac{s_z}{s_x} \quad (2.79, в)$$

и профильной (рис. 2.48, в) проекций:

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & -c_y & -c_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_y = \frac{s_y}{s_x}, \quad c_z = \frac{s_z}{s_x}, \quad (2.80, a)$$

$$m_y = m_z = 1, \quad m_x = \sqrt{c_y^2 + c_z^2} = \operatorname{tg}(\lambda_p), \quad (2.80, б)$$

$$\gamma_{yz} = 90^\circ, \quad \operatorname{tg}(\gamma_{zx}) = -\frac{c_y}{c_z} = -\frac{s_y}{s_z}, \quad \operatorname{tg}(\gamma_{xy}) = -\frac{c_z}{c_y} = -\frac{s_z}{s_y}. \quad (2.80, в)$$

Некоторые направления вектора S дают стандартные косоугольные проекции.

- Кабинетная проекция (косоугольная фронтальная диметрия), изображенная на рис. 2.48, а, образуется при $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Тогда по (2.76)–(2.78) определяем ее параметры:

$$m_x = m_y = 1, m_z = 0.5, \gamma_{xy} = 90^\circ, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 135^\circ,$$

$$\lambda_f = \arctg(0.5) \approx 26.6^\circ, c_x = c_y = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.354, S_{\text{каб}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$K_{\text{каб}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Данная проекция наиболее наглядна и проста в построении. Часто кабинетной проекцией ошибочно называют построенную на бумаге в клетку косоугольную проекцию с соотношением масштабов $m_x : m_y : m_z = 2 : 2 : \sqrt{2}$, близким к соотношению 2 : 2 : 1 кабинетной проекции.

- Кавальерная или военная проекция (косоугольная фронтальная изометрия), изображенная на рис. 2.49, образуется при выборе $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. Тогда по (2.76)–(2.78) определяем параметры проекции:

$$m_x = m_y = m_z = 1, \gamma_{xy} = 90^\circ, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 135^\circ,$$

$$\lambda_f = \arctg(1) = 45^\circ, c_x = c_y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707, S_{\text{кав}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$K_{\text{кав}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

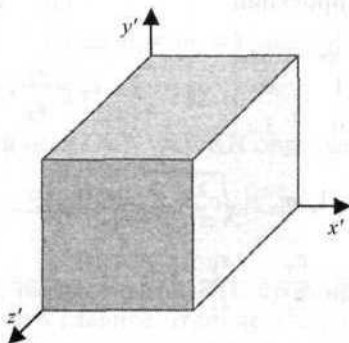


Рис. 2.49

По сравнению с кабинетной проекцией лучи при кавальерном проецировании проходят более полого, под большим углом к КП. Из-за этого проекции объектов выглядят вытянутыми и несколько неестественными. В то же время кавальерная проекция удобна для измерения длин отрезков, параллельных осям координат. Геометрическая точность и способность отображать объем объясняют использование в старину кавальерных проекций в фортификационном деле.

- *Зенитная проекция (косоугольная горизонтальная изометрия)* образуется при выборе направления проецирования $S = [1 \ 2 \ \sqrt{3}]$. Тогда по (2.74) находим ее параметры:

$$\begin{aligned}
 m_x = m_y = m_z = 1, \gamma_{zx} = 90^\circ, \gamma_{xy} = 120^\circ, \gamma_{yz} = 150^\circ, \\
 \lambda_h = 45^\circ, c_x = 0.5, c_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866, S_{\text{зен}} = [1 \ 2 \ \sqrt{3}], \\
 K_{\text{зен}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.866 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.83)
 \end{aligned}$$

Данная проекция представляет наклонный вид на объект *сверху*. В аэрофото-съемке используется *зенитная диметрия* — вид с высоты птичьего полета — с углом наблюдения $\lambda_h = 0^\circ$ и соотношениями осевых масштабов и координат точки наблюдения

$$m_x : m_y : m_z = 1 : k_y : 1, s_x^2 + s_y^2 = k_y^2 s_y^2.$$

Выбор коэффициента сжатия высоты

$$k_y = \text{ctg}(\lambda_h) \ll 1$$

позволяет изображать на чертеже вытянутые вверх объекты — горы, небоскребы, башни и т. д.

Если перед косоугольным проецированием выполнить вращения объекта, то получим *косоугольную триметрию* — наиболее общий вид параллельного проецирования, в котором осевые масштабы связаны условием, обобщающим (2.67):

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2 + \text{tg}^2(\lambda). \quad (2.84)$$

2.2.4. Центральные (перспективные) проекции

При построении *центральной* проекции (ЦП) используются *однородные координаты* и эквивалентные векторы. Декартовы $[x \ y \ z \ 1]$ и однородные $[a \ b \ c \ h]$ координаты расширенного вектора связаны соотношениями

$$x = \frac{a}{h}, y = \frac{b}{h}, z = \frac{c}{h}. \quad (2.85)$$

Назовем операцию (2.85) *приведением однородного вектора к декартовой форме*, в которой $h = 1$. Эквивалентность векторов

$$[hx \quad hy \quad hz \quad h] \sim [x \quad y \quad z \quad 1]$$

означает, что они имеют равные соответствующие декартовы координаты. Задание масштаба $h \neq 0$ позволяет без арифметических операций изменить сразу все координаты в $1/h$ раз.

Возможны два способа работы с однородными векторами:

- все операции проводятся с векторами в декартовой форме, а полученные однородные векторы сразу переводятся по (2.85) в декартову форму;
- операции проводятся с однородными векторами по специальным формулам, а перевод в декартову форму выполняется только на последнем этапе вывода изображения на экран дисплея.

Основные операции с однородными векторами:

- сложение и вычитание

$$[p_1 \quad h_1] + [p_2 \quad h_2] \sim \left[\frac{p_1}{h_1} \quad 1 \right] + \left[\frac{p_2}{h_2} \quad 1 \right] \sim [p_1 h_1 + p_2 h_2 \quad h_1 h_2];$$

- умножение вектора на скаляр

$$\alpha [p \quad h] \sim \alpha \left[\frac{p}{h} \quad 1 \right] = \left[\frac{\alpha p}{h} \quad 1 \right] \sim \left[p \quad \frac{h}{\alpha} \right];$$

- скалярное произведение векторов

$$[p_1 \quad h_1] \circ [p_2 \quad h_2] \sim \left(\frac{p_1}{h_1} \right) \circ \left(\frac{p_2}{h_2} \right) = \frac{p_1 \circ p_2}{h_1 h_2} \sim [p_1 \circ p_2 \quad h_1 h_2];$$

- векторное произведение векторов

$$[p_1 \quad h_1] \times [p_2 \quad h_2] \sim \left(\frac{p_1}{h_1} \right) \times \left(\frac{p_2}{h_2} \right) = \frac{p_1 \times p_2}{h_1 h_2} \sim [p_1 \times p_2 \quad h_1 h_2].$$

Рассмотрим методику получения центральной проекции точки $p = [x \quad y \quad z]$ на фронтальную КП от точечного проектора с координатами $S = [s_x \quad s_y \quad s_z]$ (рис. 2.50). Через точку p проходит прямой луч, описываемый параметрической функцией

$$S + (p - S)t \quad \forall t \geq 0.$$

В отличие от параллельного проецирования, не все точки пространства имеют центральные проекции, а лишь те, которые вместе с КП лежат по одну сторону от проектора, т. е. удовлетворяют условиям $z < s_z$ при $s_z > 0$ или $z > s_z$ при $s_z < 0$.

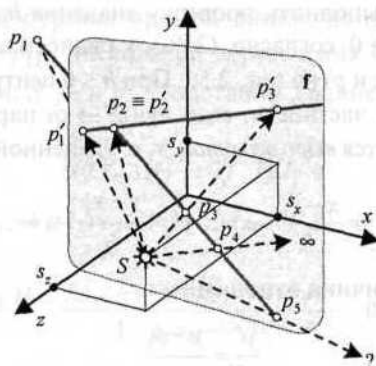


Рис. 2.50

Координаты $p' = [x' \ y' \ 0]$ проекции точки p на ФКП находим из условия $z' = 0$ пересечения луча с плоскостью xy :

$$z' = s_z + (z - s_z)t_f = 0 \Rightarrow t_f = \frac{s_z - z}{s_z - z} = \frac{1}{h}, \quad (2.86, a)$$

$$\begin{cases} x' = s_x + (x - s_x)t_f = \frac{x - c_x z}{h}, \\ y' = s_y + (y - s_y)t_f = \frac{y - c_y z}{h}, \\ c_x = \frac{s_x}{s_z}, \quad c_y = \frac{s_y}{s_z}, \quad c_f = \frac{1}{s_z}, \quad h = 1 - c_f z. \end{cases} \quad (2.86, б)$$

Получаем уравнения в однородных координатах

$$hx' = x - c_x z, \quad hy' = y - c_y z, \quad hz' = 0, \quad h = 1 - c_f z \quad (2.87)$$

и эквивалентное декартово решение в координатной и векторной формах:

$$\begin{cases} [x' \ y' \ z' \ 1] \sim [hx' \ hy' \ hz' \ h] = [x \ y \ z \ 1] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x & -c_y & 0 & -c_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Pi_f}, \\ \tilde{p}' \sim \tilde{p} \Pi_f. \end{cases} \quad (2.88)$$

Это и есть решение задачи центрального проектирования точки на фронтальную плоскость, получаемое за два этапа:

- расширенный вектор координат точки умножается на матрицу Π_f ,
- полученный однородный вектор преобразуется в декартову форму.

Между этапами следует выполнить проверку значения h . Условие существования центральной проекции $t'_x > 0$ согласно (2.86, а) равносильно условию $h > 0$. Ему удовлетворяют точки p_1, p_2 и p_3 на рис. 2.50. При $h < 0$ центральной проекции точки на ФКП не существует. В частности, если луч $S \rightarrow p_4$ параллелен ФКП, то $z = s_z$, $h = 0$, а проекция p'_4 является *вырожденной*, т. е. удаленной в бесконечность:

$$x' = \frac{x - s_x}{h} \rightarrow \infty, \quad y' = \frac{y - s_y}{h} \rightarrow \infty.$$

Тем не менее *конечная* величина отношения

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y - s_y}{x - s_x}$$

задает на ФКП направление на точку p'_4 . Наконец, если луч $S \rightarrow p_5$ сразу после испускания удаляется от КП, то на первом этапе расчета центральной проекции получим $h < 0$ и p'_5 — *мнимую* проекцию точки p_5 .

Не трудно заметить сходство механизмов центрального проецирования и образования тени точки q на плоскости по формуле (1.144) (см. рис. 1.63): в обоих процессах прообраз q' может быть действительным (при $h > 0$ и $t'_x > 0$), мнимым (при $h < 0$ и $t'_x < 0$) или вырожденным (при $h = 0$ и $v_x = 0$). Есть и отличие: точка, расположенная относительно проектора за плоскостью проецирования, имеет действительную центральную проекцию, но не имеет действительной тени. Другими словами, *плоскость проецирования является прозрачной* (часто она вообще виртуальная, т. е. мысленно подразумевается, но в действительности не существует), а *плоскость тени реальная и непрозрачная*, иначе, выходящие из источника лучи, обтекая объект, не создавали бы на ней освещенность вокруг тени.

При удалении проектора от ФКП в бесконечность центральная проекция объекта вырождается в параллельную. При этом, если:

- проектор удаляется в *ортогональном* к картинной плоскости направлении, то

$$|s_x| < \infty, |s_y| < \infty, |s_z| \rightarrow \infty, c_x = c_y = c_t = 0,$$

а в (2.88) получим $\Pi_t = O_t$ — матрицу ортогонального фронтального проецирования из (2.60);

- проектор удаляется в *неортогональном* к КП направлении, то

$$|s_z| \rightarrow \infty, 0 \neq |c_x| < \infty, 0 \neq |c_y| < \infty, c_t = 0,$$

а $\Pi_t = K_t$ — матрица косоугольного фронтального проецирования из (2.76).

Важнейшее свойство центрального проецирования, давшее ему второе название, — *перспективное* (от лат. *perspicio* — ясно вижу) *схождение проекций параллельных линий*. Изучим это интересное явление, благодаря которому плоские изображения выглядят объемно и реалистично.

Центральной проекцией отрезка прямой линии, например, $p_1 p_3$ на рис. 2.50, также является отрезок $p'_1 p'_3$ на прямой пересечения ФКП с плоскостью, проходящей через три точки: S, p_1 и p_3 . Подставим уравнение прямой $p(t) = p_0 + Vt$ в (2.88):

$$\begin{aligned} & [x(t) \ y(t) \ z(t) \ 1]_{ЦП} = \\ & = [x_0 + V_x t - c_x(z_0 + V_z t) \ y_0 + V_y t - c_y(z_0 + V_z t) \ 0 \ 1 - c_f(z_0 + V_z t)] \sim \\ & \sim \left[\frac{x_0 - c_x z_0 + (V_x - c_x V_z)t}{1 - c_f z_0 - c_f V_z t} \quad \frac{y_0 - c_y z_0 + (V_y - c_y V_z)t}{1 - c_f z_0 - c_f V_z t} \quad 0 \quad 1 \right] = [x'(t) \ y'(t) \ 0 \ 1]. \end{aligned}$$

В том, что полученные координаты проекции $x'(t)$ и $y'(t)$ описывают прямую линию, нетрудно убедиться, вычислив наклон этой линии:

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{dx'} &= \frac{dy'/dt}{dx'/dt} = \frac{(1 - c_f z_0)V_y - (c_y - c_f z_0)V_z}{(1 - c_f z_0)V_x - (c_x - c_f z_0)V_z} = \\ &= \frac{(s_z - z_0)V_y - (s_y - z_0)V_z}{(s_z - z_0)V_x - (s_x - z_0)V_z} = \text{const } \forall t. \end{aligned}$$

Таким образом, прямая линия проецируется также в прямую линию, но с *неравномерной шкалой*: движение точки по прямой $p(t)$ с постоянной скоростью V дает неравномерное движение ее проекции $p'(t)$.

Убедимся также, что **предельное положение (точка схода)** проекции прямой линии $p_0 + Vt$

$$p_{cф} = \lim_{t \rightarrow \infty} p'(t) = \left[s_x - \frac{V_x}{V_z} s_z \quad s_y - \frac{V_y}{V_z} s_z \quad 0 \right] = S - \frac{s_z}{V_z} V \quad (2.89)$$

не зависит от расположения точки p_0 , а определяется только координатами источника S и направляющего вектора V . Все параллельные прямые, не параллельные плоскости проецирования, имеют на перспективной проекции одну и ту же точку схода. Ее можно просто получить, проведя из точки S прямую $S + Vt$ до пересечения с ФКП. Если эта прямая параллельна проективной плоскости, то точка схода отсутствует.

Из сказанного следуют **выводы**:

О центральных проекции пучка параллельных прямых сходятся в одну общую точку (2.89);

- **условие существования точки схода:** $V_z \neq 0$ — пучок параллельных прямых не должен быть параллелен плоскости проецирования;
- если $V_z = 0$, то точка схода *вырождена*, т. е. удалена в бесконечность, а проекции параллельных прямых, параллельных картинной плоскости, параллельны.

Аналогично (2.86)–(2.89) выводятся формулы для центрального проецирования на *горизонтальную*

$$\left\{ \begin{aligned} & C_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x & 0 & -c_z & -c_h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_x = \frac{s_x}{s_y}, \quad c_z = \frac{s_z}{s_y}, \quad c_h = \frac{1}{s_y}, \\ & P_{ch} = \begin{bmatrix} s_x - \frac{V_x}{V_y} s_y & 0 & s_z - \frac{V_z}{V_y} s_y \end{bmatrix} = S - \frac{s_y}{V_y} V \end{aligned} \right. \quad (2.90)$$

и *профильную* ЦП:

$$\left\{ \begin{aligned} & C_p = \begin{bmatrix} 0 & -c_y & -c_z & -c_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_y = \frac{s_y}{s_x}, \quad c_z = \frac{s_z}{s_x}, \quad c_p = \frac{1}{s_x}, \\ & P_{cp} = \begin{bmatrix} 0 & s_y - \frac{V_y}{V_x} s_x & s_z - \frac{V_z}{V_x} s_x \end{bmatrix} = S - \frac{s_x}{V_x} V \end{aligned} \right. \quad (2.91)$$

Можно обойтись и одним фронтальным проецированием, поворачивая объект к проектору нужными гранями. Но если картинная поверхность состоит более чем из одной плоскости, то лучше использовать совместно разные виды перспективных проекций для уменьшения числа геометрических преобразований и времени расчета.

Центральные проекции *условно* классифицируются (см. рис. 2.38) по числу точек схода изображения *куба* или параллелепипеда. Например, проекции каркасных кубов на рис. 2.51 имеют одну (*а*), две (*б*) и три (*в*) точки схода по числу пучков параллельных ребер, не параллельных плоскости xy . Второй объект получен вращением первого вокруг вертикальной оси. Третий объект — вращением второго вокруг оси, параллельной оси x . Условность классификации ЦП означает, что изображения других объектов могут вообще не иметь ни одной точки схода (например, тетраэдр) или более трех таких точек (октаэдр).

Построение центральной проекции *отрезка* ab требует анализа четырех вариантов расположения его концевых точек a и b относительно плоскости проецирования и проектора в зависимости от значений параметров h_a и h_b .

- при $\{h_a > 0\} \cap \{h_b > 0\}$ отрезок $a'b'$ есть *действительная* проекция отрезка ab ;
- при $\{h_a \leq 0\} \cap \{h_b \leq 0\}$ проекция отрезка отсутствует в силу *мнимости* (вырожденности) ЦП обоих его концов;
- в оставшихся двух вариантах проекцией является луч, начинающийся в точке действительной проекции и уходящий в бесконечность в направлении, проти-

воположном конце отрезка. Например, при $\{h_a > 0\} \cap \{h_b \leq 0\}$ и направляющем векторе $V = b - a$ по (2.88) и (2.89) вычисляем точки

$$\tilde{a}' \sim \tilde{a}Ц_f, b_c = \left[s_x - \frac{V_x}{V_z} s_z \quad s_y - \frac{V_y}{V_z} s_z \quad 0 \right],$$

по которым строим проекцию отрезка в виде луча $a' \rightarrow 2a' - b_c$.

При $\{h_a \leq 0\} \cap \{h_b > 0\}$ получим проекцию-луч $b' \rightarrow 2b' - a_c$, где

$$\tilde{b}' \sim \tilde{b}Ц_f, a_c = \left[s_x - \frac{V_x}{V_z} s_z \quad s_y - \frac{V_y}{V_z} s_z \quad 0 \right].$$

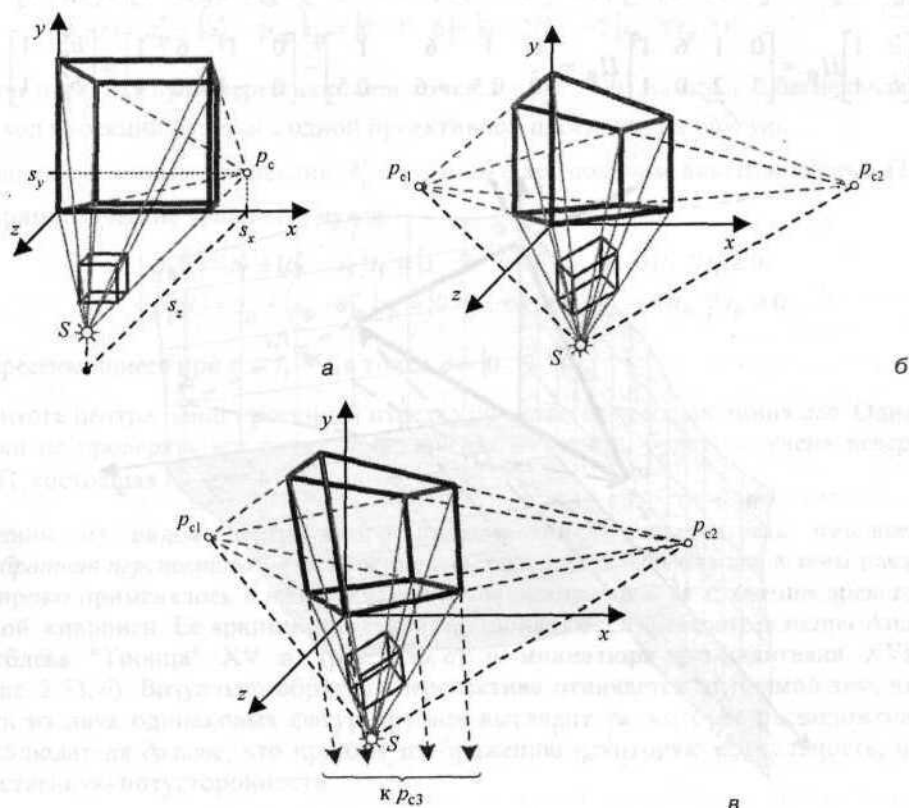


Рис. 2.51

Пример 2.6. Построить проекцию отрезка прямой ab на угол первого октанта, образованный пересечением координатных плоскостей xy и zy . Координаты проектора $S = [2 \ 1 \ 4]$, концов отрезка $a = [0 \ 1 \ 6] \in zy$ и $b = [3 \ 2 \ 0] \in xy$ (рис. 2.52).

Решение. Рассчитаем по (2.88) и (2.91) матрицы центрального проецирования на фронтальную и профильную плоскости:

$$U_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_p = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -2 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем однородные и декартовы координаты проекций концов отрезка на эти плоскости:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} U_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} U_f = \begin{bmatrix} -3 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_f & 1 \\ b'_f & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} U_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} U_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0.5 & -6 & -0.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_p & 1 \\ b'_p & 1 \end{bmatrix}.$$

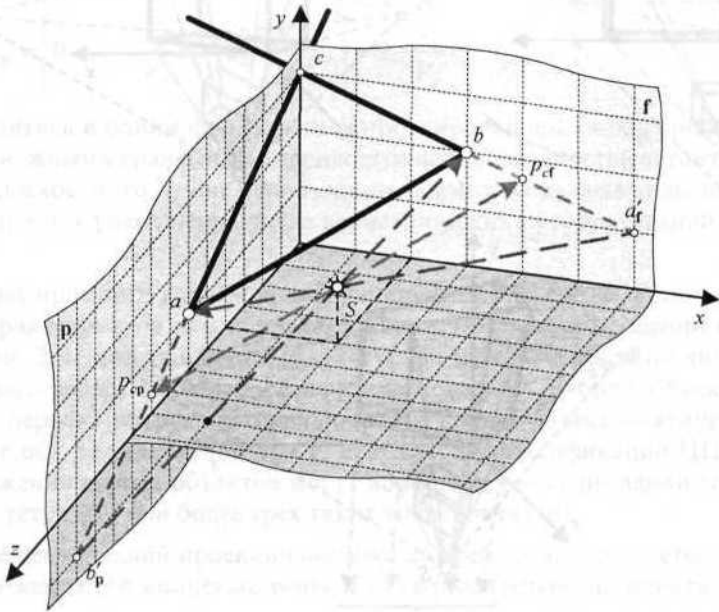


Рис. 2.52

Из четырех проекций только две $a'_p \equiv a$ и $b'_f \equiv b$ являются действительными. Проекции a'_f и b'_p — мнимые, лежащие на отрицательных продолжениях лучей $S \rightarrow a$ и $S \rightarrow b$, что подтверждается значениями $h_{a'_f} = -0.5 < 0$ и $h_{b'_p} = -0.5 < 0$.

Таким образом, мы имеем по одной точке проекции $a'_p \in zy$ и $b'_f \in xy$ на горизонтальной и фронтальной картинных плоскостях. Полная проекция отрезка ab состоит из двух отрезков, для построения которых нужны еще две точки — по одной на каждой плоскости проецирования. Например, вычислив направляющий вектор $V = b - a = [-3 \ -1 \ 6]$ и по (2.89) и (2.91) точки схода

$$p_{cf} = \left[4 \ \frac{5}{3} \ 0 \right], \quad p_{cp} = \left[0 \ \frac{1}{3} \ 8 \right]$$

(их можно построить графически, проведя через точку S прямую, параллельную ab , до пересечения с плоскостями f и p), получим параметрические уравнения лучей

$$\begin{cases} p'_f(t) = b'_f + (b'_f - p_{cf})t_f = [3 \ 2 \ 0] + [-1 \ 1/3 \ 0]t_f \quad \forall t_f \geq 0, \\ p'_p(t) = a'_p + (a'_p - p_{cp})t_p = [0 \ 1 \ 6] + [0 \ 2/3 \ -2]t_p \quad \forall t_p \geq 0. \end{cases} \quad (2.92)$$

При $t_f = t_p = 3$ лучи пересекаются в точке $c = [0 \ 3 \ 0]$ на оси y , обеспечивая переход проекции отрезка с одной проективной плоскости на другую.

Используя мнимые проекции $b'_p \in zy$ и $a'_f \in xy$, получим альтернативные (2.92) параметрические уравнения лучей

$$\begin{cases} p'_f(t) = b'_f + (b'_f - a'_f)t_f = [3 \ 2 \ 0] + [-3 \ 1 \ 0]t_f \quad \forall t_f \geq 0, \\ p'_p(t) = a'_p + (a'_p - b'_p)t_p = [0 \ 1 \ 6] + [0 \ 2 \ -6]t_p \quad \forall t_p \geq 0, \end{cases}$$

пересекающиеся при $t_f = t_p = 1$ в точке $c = [0 \ 3 \ 0]$.

В итоге центральной проекцией отрезка ab является ломаная линия acb . Однако, если не проверять все точки проекций на мнимость, будет получена неверная ЦП, состоящая из двух отрезков ab'_f и ba'_p .

Одним из видов центрального проецирования является так называемая "обратная перспектива". Построение изображений объемных тел в этом ракурсе широко применялось в византийской и унаследовавшей ее традиции древнерусской живописи. Ее яркими представителями являются знаменитая икона Андрея Рублева "Троица" XV в. (рис. 2.53, о) и миниатюра из Евангелия XVI в. (рис. 2.53, б). Визуально обратная перспектива отличается от прямой тем, что в ней из двух одинаковых фигур крупнее выглядит та, которая расположена от наблюдателя *дальше*, что придает изображению некоторую ирреальность, неестественную потусторонность.

Рассмотрим геометрическую модель метода обратной перспективы и построение с помощью этой модели изображения объекта. Желаемый эффект достигается *отделением* активного процесса формирования проекции от пассивного процесса ее созерцания. В соответствии с названием метода разместим наблюдателя и проектор S по *противоположные* стороны от ФКП (рис. 2.54), а именно:

- направление на дальнего наблюдателя зададим ортом z' ;

- положение проектора $S = [0 \ 0 \ -F]$ на фокусном расстоянии F от ФКП зададим так, что минимальная аппликата объекта $z_{\min} > -F$, а объект целиком располагался бы между наблюдателем и проектором.



а



б

Рис. 2.53

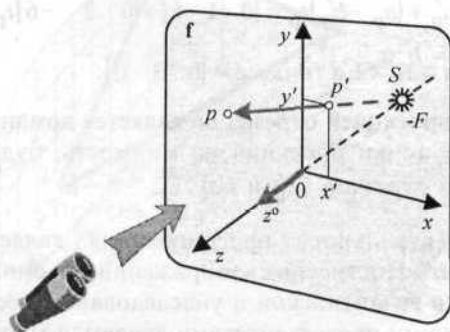


Рис. 2.54

Таким образом, расчет обратной перспективы точки $p = [x \ y \ z]$ выполняется по формуле (2.88) с матрицей и координатами проекции

$$C_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x' = \frac{Fx}{F+z}, \quad y' = \frac{Fy}{F+z}. \quad (2.93)$$